Lehrbuch

der

Buchstabenrechnung und Algebra

für

den Schul- und Selbstunterricht

bearbeitet

von

Konrad Fuß,
Kgl. Seminarlehrer.

Zweite, verbesserte Auflage.

Erster Teil:

Einleitung, die vier Species mit allgemeinen algebraischen Zahlen, die Potenzen, Wurzeln, Reduktionen, Gleichungen vom ersten und zweiten Grad.

Nürnberg,
Verlag der Friedr. Kornschen Buchhandlung.
1884.

Lehrbuch

der

Buchstabenrechnung und Algebra

für

den Schul- und Selbstunterricht

bearbeitet

von

Konrad Fuß,
Kgl. Seminarlehrer.

Zweite, verbesserte Auflage.

Erster Teil:

Einleitung, die vier Species mit allgemeinen algebraischen Zahlen, die Potenzen, Wurzeln, Reduktionen, Gleichungen vom ersten und zweiten Grad.

Nürnberg.
Verlag der Friedr. Kornschen Buchhandlung.
1884.

Vorwort zur zweiten Auflage.

In der vorliegenden zweiten Auflage meines Lehrbuchs der Buchstabenrechnung und Algebra ist, im ganzen genommen, der ursprüngliche Plan beibehalten worden. Doch habe ich, durch eigene Erfahrungen und durch Ratschläge und Winke namhafter Pädagogen veranlaßt, mehrere, nicht unwesentliche Änderungen eintreten lassen, die sich sowohl auf den Inhalt als auf die Form beziehen. Ich hoffe, daß sich hiedurch die Brauchbarkeit des Werkchens erhöht hat. — Der zweite Teil desselben wird noch im Verlauf dieses Jahres erscheinen.

Altdorf, im August 1883.

K. Fuß.

Druck von E. Th. Jacob in Erlangen.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Erster Abschnitt.

Von den vier Species mit allgemeinen algebraischen Zahlen.

I. Ganze Zahlen.

II. Gebrochene Zahlen.

Zweiter Abschnitt.

Von den Potenzen.

I. **Potenzen mit positiven ganzen Exponenten.**

II. **Potenzen mit negativen ganzen Exponenten.**

III. Potenzen von Potenzen und negativen Zahlen.

Dritter Abschnitt.

Von den Wurzeln.

Vierter Abschnitt.

Von den Reduktionen.

Fünfter Abschnitt.

Von den Gleichungen.

A. Gleichungen des ersten Grades.

I. Mit einer Unbekannten.

II. Mit mehreren Unbekannten.

B. Gleichungen des zweiten Grades.

I. Mit einer Unbekannten.

a) Rein-quadratische Gleichungen.

b) Unrein-quadratische Gleichungen.

II. Mit mehreren Unbekannten.

Einleitung.

§. 1. Begriff der Größe und Zahl, Begriff und Einteilung der Mathematik.

1) Alles, woran man übereinstimmende Merkmale wahrnimmt, nennt man gleichartig (homogen, Gegensatz: heterogen). Die natürlichen Dinge besitzen neben anderen Eigenschaften auch die Eigenschaft, daß sie aus gleichartigen Teilen bestehend gedacht werden können, haben die Eigenschaft der Größe (quantitas). Die Mathematik untersucht nur diese eine Eigenschaft, und nennt dasjenige, was sie in Beziehung auf seine Größe betrachtet, selbst eine Größe (quantum). Die Mathematik ist demnach die Wissenschaft von den Größen.

2) Eine Größe messen heißt, ermitteln, wie viel mal eine gleichartige Größe in derselben enthalten ist. Diese letztere Größe nennt man die Einheit oder das Maß der zu messenden Größe. Die Vergleichung einer Größe mit ihrem Maß führt auf die Zahl. Zahl ist nämlich die Angabe, wie viel mal die Einheit oder das Maß wiederholt werden muß, um eine Größe zu bilden. In den Größen: fünf Stunden, sechs Meilen, sieben Pfund sind eine Stunde, eine Meile, ein Pfund die den genannten Größen zu grunde liegenden Maße oder Einheiten, fünf, sechs und sieben die Zahlen. Die Zahl in Verbindung mit der Einheit führt zum bestimmten Begriff einer Größe. Wer z. B. eine klare Vorstellung von der Ausdehnung 1 ccm hat, der hat damit zugleich einen Begriff von der Ausdehnung eines Körpers, dessen Größe 4 ccm beträgt. Durch einerlei Einheit gemessene Größen heißen gleichnamige Größen, z. B. 8 qm, 12 qm.

3) Man unterscheidet zwei Arten von Größen: stetige und unstetige Größen. Eine stetige oder kontinuierliche Größe, auch Raumgröße genannt, ist eine Größe, deren Teile in einem ununterbrochenen Zusammenhange stehen, z. B. Raum. Eine unstetige oder diskrete Größe, auch Zahlengröße genannt, ist eine Größe, deren Teile in Wirklichkeit getrennt sind und nur von dem Verstande zu einem Ganzen zusammengefaßt werden, z. B. ein Dutzend Nüsse, eine Herde Schafe.

4) Dieser Einteilung der Größen gemäß zerfällt die Mathematik in zwei besondere Wissenschaften: in die Arithmetik oder die Wissenschaft von den Zahlen oder Zahlengrößen, und in die Geometrie oder die Wissenschaft von den räumlichen Größen (Planimetrie, Stereometrie).

§. 2. Allgemeines über die Zahlen.

1) Dem vorigen §. gemäß gelangen wir zum Begriffe der Zahl durch Vergleichung der sinnlich wahrnehmbaren Dinge, der Größen, mit ihrem Maße oder ihrer Einheit. Die Zahlen so bilden, wie sie der Reihe nach durch das wiederholte je einmalige Setzen der Einheit hervorgehen, heißt zählen (numerieren), die Reihe der so entstehenden Zahlen heißt die natürliche Zahlenreihe, die einzelnen Zahlen selbst nennt man die natürlichen Zahlen (Zahlensysteme: das dekadische, hexadische u. s. w.).

2) Bezeichnet eine Zahl eine Vielheit bestimmter Einheiten, so heißt sie eine benannte (konkrete) Zahl, und jene Einheit ist die Benennung, z. B. drei Pfund, acht Pferde; drückt sie dagegen nur die Vielheit an sich aus, so nennt man sie eine unbenannte oder reine (abstrakte) Zahl, z. B. fünf, zehn. Neben den Wörtern für die Zahlen, den Zahlwörtern: eins, zwei, drei u. s. w. hat man noch eigne Zeichen für dieselben eingeführt, die Ziffern, z. B. für die Zahlen vier, fünf und sechs die Ziffern 4, 5 und 6 (indo-arabische Zahlenbezeichnung, Stellenwert, Zifferrechnung).

3) Die Aufgabe der Arithmetik ist eine doppelte; einerseits hat sie die Natur und die Eigenschaften der Zahlen zu erforschen (Zahlenlehre oder Theorie der Zahlen), andererseits hat sie das Rechnen mit den Zahlen zu lehren (theoretische und praktische Aufgabe). Rechnen heißt, aus gegebenen Zahlen auf vorgeschriebene Weise andere Zahlen bestimmen. Die einfachste Art des Rechnens ist das Zählen, alle anderen Arten sind daraus abzuleiten (Rechnungsoperationen). Die Verbindungen von Zahlen zu neuen Zahlen nennt man Ausdrücke, Zahlenausdrücke, zusammengesetzte Zahlen oder Zahlenformen, z. B. $(4 + 5)$ oder $(9 : 6)$; den Gegensatz hiezu bilden die einfachen Zahlen, z. B. 5.

§. 3. Buchstaben als Zahlzeichen.

1) Hauptaufgabe der Arithmetik ist Erforschung der Gesetze des Rechnens, d. h der Gesetze der Zahlenverbindungen. Da nun

diese Gesetze jedenfalls von *allen* Zahlen gelten, so hat man, um dieselben unabhängig von den besonderen Werten der Zahlen, die verbunden werden sollen, in der notwendigen Allgemeinheit ausdrücken zu können, außer den Zeichen für *bestimmte* Zahlen (Zahlen mit genauer Angabe der Menge ihrer Einheiten) auch noch Symbole für *allgemeine* (unbestimmte) Zahlen, d. h. Zahlen, bei denen ein besonderer Wert derselben nicht in betracht kommt, nötig. Als Zeichen für solche allgemeine Zahlen wendet man *Buchstaben* (in der Regel die des kleinen lateinischen Alphabets) an. Die durch Buchstaben bezeichneten Zahlen nennt man *Buchstabengrößen*, *litterale Zahlen* oder *allgemeine* Zahlen, im Gegensatz zu den mittelst Ziffern dargestellten *numerischen* oder *bestimmten* Zahlen.*) Sehr häufig werden *numerierte* Buchstaben, d. h. Buchstaben, denen rechts unten Ziffern angehängt sind, die man *Stellenzeiger* (Indices, Suffixe) nennt, angewendet, z. B. a_1, a_2, a_3 (sprich: a unten eins, a unten zwei, a unten drei). Ein Buchstabe kann jede beliebige Zahl bedeuten; kommt aber in einer Rechnung ein und derselbe Buchstabe wiederholt vor, so bezeichnet er jedesmal dieselbe Zahl.

2) Die *Anwendung der Buchstaben* statt der Zahlen beim Rechnen *gewährt mannigfache Vorteile*. Zunächst wird man durch sie in den Stand gesetzt, *Sätze, welche von allen Zahlen gelten, mit völliger Allgemeinheit und dennoch kürzer als in Worten auszudrücken*. Dies läßt sich leicht an einigen Sätzen erläutern. So wird z B. durch $a \cdot (m + n) = a \cdot m + a \cdot n$ eine Eigenschaft der Multiplikation und Addition von unbegrenzt vielen Zahlen kurz und ganz allgemein ausgedrückt, denn man erhält immer eine richtige Gleichung, welche Zahlen man auch an die Stelle der Buchstaben a, m und n setzen mag, also $3 \cdot (5 + 4) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 4$; $12 \cdot (6 + 1) = 12 \cdot 6 + 12 \cdot 1$, u. s. w. Als weitere Belege können dienen: $a \cdot (m - n) = a \cdot m - a \cdot n$ oder $m \cdot m - n \cdot n =$

---

*) Die Einteilung der Zahlen nach ihrer Bezeichnungsweise stellt folgendes Schema übersichtlich dar:

Zahlzeichen

numerisches		litterales	
einfaches	zusammengesetztes	einfaches	zusammengesetztes
z. B. 8	z. B. $8 + 4$	z. B. a	z. B. $3a + 2b$.

$(m + n) \cdot (m - n)$. Insbesondere sind einige Formeln aus der Geometrie, z. B. die über die Anzahl der Geraden, welche zwischen 2, 3, 4, 5, n Punkten möglich sind, nämlich $n(n - 1) : 2$, oder die über die Anzahl der Diagonalen eines 3, 4, 5 n ecks, nämlich $n(n - 3) : 2$, geeignet, diesen Nutzen des Buchstabengebrauchs zu veranschaulichen und das Interesse des Anfängers zu fesseln. Daß zum Ausdruck dieser und anderer Gesetze bestimmte Zahlen nicht ausreichen, ist klar, denn den durch solche Zahlen ausgedrückten Gleichungen sieht man es nicht an, daß sie auch für beliebige andere Zahlen gelten, sonst könnte man ja aus der Gleichung $2 \cdot 2 = 2 + 2$ schließen, daß auch $3 \cdot 3 = 3 + 3$ oder $4 \cdot 4 = 4 + 4$ wäre. — Sodann sind die Rechnungen mit Buchstabengrößen einfacher und leichter als die mit numerischen Zahlen. Es ist daher, wenn eine Aufgabe zu lösen ist, vorteilhaft, an die Stelle der Zahlen Buchstaben zu setzen; man deutet dann durch die Verbindung dieser Buchstaben an, welche Operationen der Aufgabe gemäß mit den Zahlen vorgenommen werden sollen, reduciert das erhaltene Resultat auf die zum Rechnen bequemste Form und führt schließlich an Stelle der Buchstaben die Zahlen wieder ein. Zur Erläuterung kann folgendes Beispiel dienen. Es sei die Aufgabe: „Welche Zahl ergibt sich, wenn man die halbe Summe und die halbe Differenz der beiden Brüche $\frac{43}{81}$ und $\frac{2}{5}$ addiert?" zu lösen. Bezeichnet man den Bruch $\frac{43}{81}$ mit m und den Bruch $\frac{2}{5}$ mit n, so deutet $\frac{1}{2} \cdot (m + n)$ die halbe Summe, $\frac{1}{2} \cdot (m - n)$ die halbe Differenz dieser beiden Brüche an und der Ausdruck $\frac{1}{2} \cdot (m + n) + \frac{1}{2} \cdot (m - n)$ stellt alle Operationen dar, welche der Aufgabe gemäß auszuführen sind. Nun kommt es darauf an, diesen Ausdruck auf einen einfacheren zu bringen. Zu dem Zweck bedenke man, daß man statt $\frac{1}{2} \cdot (m + n) + \frac{1}{2} \cdot (m - n)$ auch $\frac{1}{2} \cdot m + \frac{1}{2} \cdot n + \frac{1}{2} \cdot m - \frac{1}{2} \cdot n$ setzen kann. Es ist nun ersichtlich, daß $\frac{1}{2} \cdot n$ durch $- \frac{1}{2} \cdot n$ getilgt wird und daß $\frac{1}{2} \cdot m + \frac{1}{2} \cdot m$ so viel als m ist. Mithin läßt sich der ganze Ausdruck $\frac{1}{2} \cdot (m + n) + \frac{1}{2} \cdot (m - n)$ auf die Größe m zurückführen. Da nun $m = \frac{43}{81}$ ist, so erhält man als Resultat der obigen Aufgabe $\frac{1}{2} \cdot (\frac{43}{81} + \frac{2}{5}) + \frac{1}{2} \cdot (\frac{43}{81} - \frac{2}{5})$ den Wert $\frac{43}{81}$. — Endlich gewähren sie auch den Vorteil, daß man mit ihrer Hilfe noch unbekannte Zahlen kurz bezeichnen und diese nun in die Rechnung einführen kann (zur Bezeichnung noch unbekannter Zahlen pflegt man die letzteren Buchstaben x, y, z, zur Bezeichnung bekannter Zahlen die ersteren Buchstaben des Alphabets zu nehmen).

3) Da die Arithmetik, wie aus dem Vorstehenden folgt, die Rechnungsoperationen sowohl mit numerischen als litteralen Zahlen ausführen kann, so zerfällt sie in zwei Teile: in die spezielle oder gemeine und in die allgemeine Arithmetik. Erstere beschäftigt sich nur mit bestimmten Zahlen, letztere bedient sich allgemeiner Zahlen und gebraucht zum Ausdruck derselben Buchstaben; dieses letzteren Umstandes halber heißt die allgemeine Arithmetik auch Buchstabenrechnung. Ein besonderer Teil derselben führt den Namen Algebra[1]). — Die bisher genannten Teile der Mathematik bringt folgendes Schema zur Übersicht:

Mathematik

Arithmetik | Geometrie

Spezielle A. (Zifferrechnung) | Allgemeine A. (Buchstabenr.). | Planimetrie | Stereometrie

§. 4. Gleichung, Ungleichung, Relation und Formel.

1) Zwei Zahlen heißen einander gleich, wenn sie die nämliche bestimmte Zahl bedeuten, wenn sie also in ihrem Inhalte übereinstimmen. Man deutet dies durch das zwischen die beiden Zahlen gesetzte Gleichheitszeichen (=) an, z. B. $a = b$ (gelesen: a gleich b). Die symbolische Darstellung der Gleichheit zweier Ausdrücke heißt Gleichung (aequatio); der links vom Gleichheitszeichen stehende Ausdruck heißt die linke Seite, der rechts davon stehende die rechte Seite der Gleichung.

2) Sind zwei Zahlen ihrem Inhalte nach verschieden, so nennt man sie ungleich. Das Zeichen der Ungleichheit ist ein Winkel, dessen Öffnung der größeren Zahl zugekehrt wird (Konvergenz- und Divergenzzeichen). Die symbolische Darstellung der Ungleichheit zweier Ausdrücke wird eine Ungleichung genannt. Man schreibt und liest:

---

[1]) Historische Notiz. Buchstaben statt der Zahlen wurden durch Regiomontanus (gest. 1476), Cardanus (gest. 1575) u. A., namentlich aber durch Franz Viëta (geboren 1540, gest. 1603 in Paris) eingeführt.

$a > b$	a größer als b.
$a < b$	a kleiner als b.
$a \gtrless b$	a größer oder kleiner als b.
$a \gtreqless b$	a größer, gleich oder kleiner als b.

3) Gleichungen und Ungleichungen bezeichnet man mit dem gemeinsamen Namen Relation. Zwischen irgend zwei Zahlen muß jederzeit eine bestimmte Relation bestehen; d. h. es ist entweder $a > b$, oder $a = b$ oder $a < b$.

4) Gleichungen, welche arithmetische Gesetze in allgemeinen Ausdrücken darstellen, heißen Formeln, z. B. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

§. 5. Operationszeichen.

1) Die vier Species: Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division, welche die Basis aller andern Rechnungsarten bilden, deutet man durch besondere Zeichen, Rechnungs- oder Operationszeichen genannt, an, nämlich:

die Addition durch das Zeichen $+$, gelesen plus
„ Subtraktion durch das Zeichen —, gelesen minus
„ Multiplikation durch das Zeichen $\times$ oder $\cdot$ gelesen mal
„ Division durch das Zeichen : oder ——— gelesen (dividiert) durch.

Hiernach wird geschrieben und gelesen:

$a + b$	a plus b
$a - b$	a minus b
$a \times b$ oder $a \cdot b$	a mal b
$a : b$ oder $\frac{a}{b}$	a durch b.

2) Das Multiplikationszeichen wird jedoch in mehreren Fällen weggelassen, und zwar: 1) bei Multiplikation einer litteralen Zahl mit einer numerischen Zahl, z. B. 6a (gelesen: sechs a, statt 6 mal a); 2) bei Multiplikation zweier oder mehrerer Buchstabengrößen, z. B. ab (gelesen: ab statt a mal b), oder mnp statt $m \cdot n \cdot p$; 3) wenn ein in Klammern stehender Ausdruck mit einer bestimmten Zahl oder mit einer Buchstabengröße multipliciert werden soll, z. B. $6\,(a + b + c)$, $b(m + n)$, $8c\,(r + s + t)$; 4) wenn zwei oder mehrere in Klammern stehende Ausdrücke zu multi-

plicieren sind, z. B. $(a + b)(c + d)$ oder $(a + b)(c + d)(m + n + q)$.

§. 6. Gebrauch der Klammern.

1) Jeder zusammengesetzte Ausdruck, mit dem irgend eine Rechnung vorgenommen werden soll, muß eingeklammert werden. Die Klammer oder Parenthese hat demnach den Zweck, den von ihr umschlossenen Ausdruck als eine einzige Zahl darzustellen. Soll z. B. a um die Summe von b und c vermindert werden, so muß man schreiben: $a - (b + c)$; man lese: a minus Klammer b plus c Klammer geschlossen. Würde man in diesem Fall $a - b + c$ schreiben, so hätte dieser Ausdruck folgende Bedeutung: a soll um b vermindert und der Rest wieder um c vermehrt werden. Um anzudeuten, daß die Summe von a und b mit c multipliciert werden soll, muß man schreiben $(a + b) \cdot c$; man lese: Klammer a plus b Klammer geschlossen mal c. — Wenn in einem Ausdruck mehrere Klammern nötig sind, so bedient man sich zur Erleichterung der Übersicht verschiedenartiger Klammern: der starken und schwachen runden **( )**, ( ); der starken und schwachen eckigen **[ ]**, [ ] und der geschwungenen { }. — Klammern auflösen oder wegschaffen heißt, einen Zahlenausdruck, in dem dieselben vorkommen, so umformen, daß er ohne Klammern richtig erscheint (die angezeigten Operationen ausführen).

2) Über den Gebrauch der Klammern ist noch Folgendes zu bemerken:*) a) Kommen Operationen derselben Stufe**) ohne Klammern verknüpft vor, so hat man sich dieselben in der Reihenfolge, in der man liest (von links nach rechts) fortschreitend ausgeführt zu denken. Hiernach bedeutet z. B. $a - b + c = (a - b) + c$, oder $a : b : c = (a : b) : c$. Die Multiplikation jedoch geht der Division voraus. Man kann also $a : bc$ statt $a : (bc)$ schreiben. — b) Kommen Operationen verschiedener Stufen zusammen, ohne daß durch Klammern ihre Reihenfolge vorgeschrieben wäre, so hat man sich jederzeit die Ope-

---

*) Schröder, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. — **) Addition und Subtraktion sind die Operationen der ersten, Multiplikation und Division der zweiten Stufe.

rationen der höheren Stufe zuerst ausgeführt zu denken (also gehen z. B. die Multiplikation und Division der Addition und Subtraktion voraus). Hiernach ist also $a + b \cdot c = a + (b \cdot c)$, oder $a + b : c = a + (b : c)$.

§. 7. Die mathematische Methode.

Die Mathematik ist eine Wissenschaft im strengsten Sinne des Wortes; mathematische Gewißheit gilt als die vollkommenste Gewißheit. Das Verfahren, das die Mathematik einschlägt, um ihr wissenschaftliches Gebäude zu errichten, ist wie das, welches man bei allem gründlichen Denken anwendet, ein Fortschreiten vom Bekannten zum Unbekannten. Die auf diese Weise im Laufe der Zeit gefundenen Wahrheiten bilden den Inhalt der Mathematik. Derselbe besteht in Erklärungen, Grundsätzen, Lehrsätzen und Aufgaben.

1) Erklärung oder Definition ist die Angabe der wesentlichen Merkmale eines Begriffs. Wird in derselben angegeben, wie eine Größe entsteht, so wird sie genetische Erklärung genannt.

2) Grundsatz (Axioma) ist eine an sich deutliche und klare Grundwahrheit, die des Beweises nicht bedarf.

3) Lehrsatz (Theorema) ist der Ausspruch einer Wahrheit, welche durch Gründe bewiesen werden muß. Bei jedem Lehrsatz unterscheidet man dreierlei: die Voraussetzung, die Behauptung und den Beweis. Die Voraussetzung (Hypothesis) nennt den Gegenstand, von dem etwas ausgesagt wird und gibt die Bedingungen an, unter denen die ausgesprochene Wahrheit Giltigkeit hat. Die Behauptung (Thesis) spricht die zu beweisende Wahrheit aus. *) Der Beweis (Demonstratio)

*) In dem Satze: „Wenn zwei gerade Linien auf einer dritten senkrecht stehen, so sind sie parallel,“ ist die Voraussetzung in den Worten enthalten: „Wenn zwei gerade Linien auf einer dritten senkrecht stehen,“ und die Behauptung in den Worten: „so sind sie parallel.“ In dieser Form treten sehr viele Sätze der Geometrie auf. Sie besteht also, wie dieses Beispiel zeigt, darin, daß die Voraussetzung mit „wenn“ vorausgeschickt wird und darauf die Behauptung mit „so“ folgt. Häufig haben die Sätze auch eine andere Form, z. B.: zwei Parallellinien sind überall gleichweit von einander entfernt.“ In diesem Fall kann man sie stets auf die angegebene Form zurückführen; hier also so: Wenn zwei gerade Linien parallel sind, so sind sie überall gleich weit von einander entfernt. Es ist wichtig, daß man Voraussetzung und Behauptung unterscheiden lerne. Der Schüler übe sich daher in dieser Unterscheidung auch

enthält die Gründe für die Richtigkeit der Behauptung. Der Beweis kann direkt und indirekt geführt werden. Der direkte Beweis beginnt im allgemeinen mit der Voraussetzung, verbindet mit ihr frühere bereits als wahr anerkannte Sätze und sucht so die Behauptung als Folgerung dieser Sätze hinzustellen. [1]) Einen Satz beweisen heißt demnach: seine Richtigkeit von andern Wahrheiten ableiten, ihn vermittelst anderer Sätze, die man bereits als richtig anerkannt hat (Grundsätze und Lehrsätze) als wahr darthun. Der indirekte oder apagogische Beweis zeigt, daß das Gegenteil der Behauptung nicht stattfinden könne. — Einen Lehrsatz umkehren heißt, einen neuen Satz bilden, worin Voraussetzung und Behauptung des ersteren gegen einander vertauscht sind.

4) Der Zusatz (Corollarium) oder der Folgesatz enthält eine Folgerung aus vorhergehenden Lehrsätzen, welche ohne ausführlichen Beweis einleuchtet.

5) Aufgabe (Problema) ist die Forderung, aus gegebenen Größen andere herzuleiten. Die Angabe, wie die gegebenen Größen der aufgestellten Forderung gemäß mit einander verbunden werden müssen, nennt man die Auflösung der Aufgabe. Der Beweis hat darzuthun, daß die Forderung wirklich erfüllt ist. — Der Forderungssatz (Postulatum) verlangt, etwas herzustellen, das eine unmittelbare Grundvorstellung ist, z. B. zwischen zwei Punkten eine gerade Linie zu ziehen, oder einen Kreis mit gegebenem Radius zu zeichnen (Postulate der Planimetrie; Voraussetzung der natürlichen Zahlenreihe das einzige Postulat der Arithmetik).

§. 8. Die allgemeinen mathematischen Grundsätze.

1) Jede Größe ist sich selbst gleich, also $a = a$, $b = b$.

2) Gleiches darf stets für Gleiches gesetzt werden. Hiernach ist man immer berechtigt, für eine Zahl eine andere gleichwertige Zahl zu setzen; so kann man z. B. in jeden Ausdruck, ohne den Wert desselben zu ändern, für die darin etwa vorkommende Zahl 12 setzen

---

an nicht mathematischen Sätzen; so enthält z. B. der Satz: „Im Frühling blühen die Veilchen" die Voraussetzung: „wenn es Frühling ist," und die Behauptung: „so blühen die Veilchen."

[1]) Auf die Übereinstimmung des Ergebnisses des Beweises mit der aufgestellten Behauptung pflegt man durch die Buchstaben w. z. b. w. (was zu beweisen war) oder q. e. d. (quod erat demonstrandum) hinzudeuten, welche man dem Beweise beisetzt.

3 · 4, 2 · 6 oder 7 + 5 u. s. w. Die Einsetzung einer Zahl für eine gleichwertige Zahl nennt man Substitution (man sagt: für eine Zahl, z. B. für a werde eine andere, z. B. b substituiert; a ist die zu ersetzende, zu eliminierende Zahl, b die dafür einzusetzende, zu substituierende Zahl).

3) Wenn zwei Größen einer und derselben dritten gleich sind, so sind sie auch einander gleich. Ist a = c und b = c, so ist auch a = b.

4) Das Ganze ist gleich allen seinen Teilen zusammengenommen und das Ganze ist größer als jeder seiner Teile.

5) Gleiches zu Gleichem addiert gibt gleiche Summen; Gleiches von Gleichem subtrahiert, gibt gleiche Differenzen; Gleiches mit Gleichem multipliciert gibt gleiche Produkte; Gleiches durch Gleiches dividiert gibt gleiche Quotienten; wenn $a = b$ und $c = d$ ist, so ist auch $a + c = b + d$, $a - c = b - d$, $ac = b \cdot d$ und $a : c = b : d$. Diese vier Grundsätze lassen sich in das allgemeine Princip: Gleiches auf gleiche Weise verändert, bleibt gleich zusammenfassen.

6) Gleiches auf ungleiche Weise verändert wird ungleich.

7) Ungleiches auf gleiche Weise verändert bleibt ungleich.

Erster Abschnitt.

Von den vier Species mit allgemeinen algebraischen Zahlen.

I. Ganze Zahlen.

§. 9. Die Buchstabenrechnung im allgemeinen.

Ehe man mit der eigentlichen Buchstabenrechnung beginnt, empfiehlt es sich, von den Schülern zunächst Aufgaben lösen zu lassen, durch welche dieselben mit den Buchstaben als allgemeinen Zahlzeichen, mit dem richtigen Gebrauch der Klammern und der Operationszeichen sowie mit der Bildung und Zergliederung zusammengesetzter Zahlenausdrücke vertraut gemacht werden. Übungsmaterial hiezu findet sich in der von mir bearbeiteten „Sammlung von Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra," 2. Auflage, unter der Überschrift „Vorübungen."

§. 10. Die algebraischen Zahlen.

1) Unter den Buchstaben, welche man zur allgemeinen Auflösung von Aufgaben benützt, kann man sich, da nach 1) des §. 3 ein Buchstabe jede beliebige Zahl bedeuten kann, irgend welche Zahlen der natürlichen Zahlenreihe (§. 2) vorstellen. Es fragt sich nun, ob sämtliche Rechenoperationen, welche solche Aufgaben zu ihrer Auflösung fordern, auch wirklich innerhalb der natürlichen Zahlenreihe in allen Fällen ausgeführt werden können. Bei der Addition ist dies der Fall; denn da die natürliche Zahlenreihe im Sinne des Vorwärtsschreitens unbegrenzt ist, so können zwei oder mehrere Zahlen immer addiert werden; so ist z. B. die Aufgabe 1) unter V. der Vorübungen innerhalb der natürlichen Zahlenreihe immer lösbar, man mag für a und b Zahlen einsetzen, welche man will. Nicht so verhält es sich mit der Subtraktion. Hier kann es sich vielmehr treffen, daß durch die Einsetzung bestimmter Werte in die allgemeinen Formeln der Subtrahend größer wird als der Minuend. In diesem Fall gelangt man beim Rückwärtszählen vom Minuend aus schon zu Null, bevor noch die ganze Anzahl von Einheiten ab- oder zurückgezählt sind, die der Subtrahend fordert.

Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn man in der Aufgabe 2 unter V. der Vorübungen für v z. B. 15 und für e etwa 24 setzt, denn alsdann ergibt sich der allgemeinen Auflösung: g = v — e zufolge als Gewinn: g = 15 — 24. Die Subtraktion ist innerhalb der natürlichen Zahlenreihe nur dann ausführbar, wenn der Minuend größer ist als der Subtrahend. Aus diesem Grunde sind Ausdrücke wie 15 — 24 vollständig bedeutungslos, da ihnen keine Zahl der natürlichen Zahlenreihe entspricht.

2) Dieser Umstand legt die Frage nahe, in welcher Weise wohl die natürliche Zahlenreihe zu erweitern und zu vervollständigen ist, damit die Subtraktion in allen Fällen ausgeführt werden kann. Der Grund für die Nichtausführbarkeit der Subtraktion in dem Fall, wenn der Subtrahend größer ist als der Minuend liegt darin, daß die natürliche Zahlenreihe nach unten mit der Zahl 1 abbricht. Daraus folgt, daß die Subtraktion auch für den angeführten Fall ausführbar wird, wenn man dieses Hindernis beseitigt, man also die natürliche Zahlenreihe rückwärts über Null hinaus erweitert; denn alsdann kann man stets die Zahl angeben, welche die Differenz zwischen dem Minuend und dem Subtrahend ist.

3) Man hat daher die natürliche Zahlenreihe in der Weise erweitert, daß man ihr von Null ausgehend rückwärts eine neue unbegrenzte Reihe von Zahlen anfügt, die unter sich in der nämlichen Weise auf einander folgen, wie die ursprünglichen Zahlen. Den Mittelpunkt dieser beiden Zahlenreihen bildet die Null; von ihr geht das Zählen sowohl auf- als abwärts aus, nämlich:

$$\ldots . 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ \mathbf{0},\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \ldots .$$

Selbstverständlich müssen die Glieder dieser zwei Reihen durch irgend ein Zeichen von einander unterschieden werden. Da die Glieder der Zahlenreihe über Null durch Addition der Einheit, dagegen die Zahlen der Reihe unter Null durch Subtraktion der Einheit, durch eine stete Verminderung über Null hinaus, entstehen; so liegt es nahe, die ersteren durch +, die letzteren durch — zu bezeichnen, also:

$$\ldots -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ \mathbf{0},\ +1,\ +2,\ +3,\ +4,\ +5 \ldots$$

4) Die Zeichen + und —, welche in der bestimmten Arithmetik Operationszeichen sind, dienen somit in der allgemeinen Arithmetik dazu, die verschiedene Lage der Zahlen in bezug auf Null zu be-

zeichnen. Deshalb heißen sie in diesem Sinn **Beziehungs-, Richtungs-** oder **Vorzeichen**. Um diesen Gegensatz in der Lage der Zahlen in Beziehung auf Null auch in Worten auszudrücken, nennt man die Zahlen der Reihe über Null **positive**, hingegen die der Reihe unter Null **negative** Zahlen (**positive** und **negative** Zahlenreihe). Alle Zahlen, welche auf derselben Seite von Null liegen, welche also mit demselben Vorzeichen versehen sind, heißen **gleichartige** oder **übereinstimmende Zahlen**. Zahlen dagegen, welche auf verschiedenen Seiten von Null liegen, also mit verschiedenen Vorzeichen behaftet sind, nennt man **entgegengesetzte Zahlen**. Beide Arten von Zahlen führen den gemeinschaftlichen Namen **algebraische, relative Zahlen**, oder **Richtungszahlen**. Zahlen, bei denen eine verschiedene Lage zu Null nicht in betracht kommt, sondern nur die Menge ihrer Einheiten, ihr **absoluter** Zahlenwert, heißen **absolute Zahlen**

5) Es ist nun einleuchtend, daß durch die soeben erwähnte Erweiterung der natürlichen Zahlenreihe, der Zweck, die Subtraktion allgemein ausführbar zu machen, vollkommen erreicht ist. Ist z. B. die Differenz 15—24 zu bestimmen, so zählt man von 15 aus 24 Einheiten abwärts; hiedurch gelangt man zu — 9; also ist 15—24 = — 9.

6) An jeder algebraischen Zahl unterscheidet man das **Vorzeichen** und den **Zahlenwert** (die Menge der in ihr ausgedrückten Einheiten). Die Null hat kein Vorzeichen. Die Vorzeichen der algebraischen Zahlen lassen sich durch das Hinzunehmen der Null auf die Bedeutung eines Additions- und Subtraktionszeichens zurückführen, denn es ist $+a = o + a$ und $(-a) = o - a$.

7) Die natürliche Zahlenreihe kann man veranschaulichen durch das **Bild einer geraden Linie**, auf welcher in gleichen Abständen von einander eine Reihe von Punkten angenommen sind; die auf einander folgenden Punkte stellen die einzelnen Zahlen vor. Zu dieser Zahlenlinie, die sich von Null aus aufwärts ins Unendliche erstreckt, kann man sich nun dem Vorhergehenden zufolge eine zweite denken, die von Null aus in entgegengesetzter Richtung verläuft; die so gedachte Zahlenlinie stellt in den gleich weit abstehenden Punkten derselben die Reihe der negativen Zahlen vor. — Jeden Übergang in diesen Reihen von einer Zahl zur andern kann man einen **Schritt** nennen. Dieser Übergang

ist in doppelter Weise ausführbar; wie man nämlich von der Null aus entweder aufwärts oder abwärts fortschreiten kann, so kann man auch an jeder andern Stelle der Zahlenreihe in ähnlicher Weise von einer Zahl zur andern entweder im Sinne der positiven oder der negativen Zahlenreihe übergehen. Demgemäß unterscheidet man zwischen einem Schritt im positiven Sinn und einem Schritt im negativen Sinn; so ist der Übergang von + 12 zu + 13, oder von — 9 zu — 8 ein Schritt im positiven Sinn; dagegen der Übergang von + 13 zu + 12, oder von — 8 zu — 9 ein Schritt im negativen Sinn.

8) Es gibt eine gewisse Art von Größen, welche durch stete Verminderung über einen bestimmten Null- oder Grenzpunkt hinaus in Größen eines andern Namens (einer andern Art, in die ihres Gegenteiles, Gegensatzes) übergehen, ganz ebenso wie die negativen Zahlen aus den positiven durch ein stetes Abziehen, durch eine stete Verminderung über Null entstehen. So geht durch stetes Abnehmen Vermögen in Schulden, Gewinn in Verlust, Überfluß in Mangel, Wärme in Kälte u. s. w. über. Zwei verschieden benannte Größen, von denen die eine durch stete Verminderung über einen gemeinsamen Grenz- oder Nullpunkt hinaus in die andere übergeht, heißen in bezug auf diesen gemeinsamen Nullpunkt entgegengesetzte Größen. Die eine davon heißt positiv, die andere negativ.

Es ist nun unsere Aufgabe, die vier Species mit Buchstaben unter Berücksichtigung der algebraischen Zahlen durchzuführen. Neben den Buchstaben werden jedoch auch Zahlen benützt. Hiedurch soll dem Anfänger das Auffaßen der zu entwickelnden Gesetze erleichtert werden, zugleich sollen die in Zahlen gegebenen Beispiele auch dazu dienen, dem Schüler zu zeigen, daß die vom gewöhnlichen Rechnen her bekannten Mechanismen des Verfahrens die Folgen allgemeiner Gesetze sind.

§. 11. **Addition.**

A. **Erklärungen und Lehrsätze.**

a) Begriff der Addition.

Addieren heißt, zwei oder mehrere entweder gleichartige oder entgegengesetzte Zahlen zu einer einzigen Zahl vereinigen. [1]) Die zu addierenden Zahlen werden Sum-

[1]) Man vergleiche mit dieser Definition die, welche die spezielle Arithmetik aufzustellen pflegt: addieren heißt, zwei oder mehrere Zahlen zu

manden, Posten oder Glieder genannt, und die zu bestimmende Zahl heißt die Summe oder algebraische Summe von jenen. — Der Absatz 7 des vorigen §. legt folgende Definition nahe, aus welcher sich unmittelbar die Gesetze des Addierens ergeben: Addieren heißt, in der allgemeinen Zahlenreihe von Null aus um so viele Schritte und in demjenigen Sinne fortgehen, wie die gegebenen Zahlen durch ihren Zahlenwert und ihr Vorzeichen angeben. Diejenige Zahl, zu welcher man auf diese Weise gelangt, heißt die Summe der gegebenen. Hiernach bedeutet $(+4) + (-2) + (+6) + (-3)$:*) man soll von Null aus in der allgemeinen Zahlenreihe zuerst nach der positiven Seite hin um 4 Einheiten, von hier aus gegen die negative Zahlenreihe um 2 Einheiten, sodann von da aus gegen die positive Seite um 6 Einheiten und endlich von der letzteren Stelle aus gegen die negative Seite hin um 3 Einheiten fortschreiten. Die Entfernung der letzteren Stelle von der Null drückt alsdann das Resultat aus. Dies ist in dem vorliegenden Fall $+ 5$.

b) Allgemeines Gesetz der Addition.

Bei der Bildung einer Summe kann die Aufeinanderfolge der Glieder willkürlich gewählt werden; oder mit andern Worten: Die Glieder einer Summe dürfen ihre Plätze wechseln; es ist also $(+a) + (+b) = (+b) + (+a)$, oder $(+a) + (+b) + (+c) = (+b) + (+c) + (+a) = (+c) + (+a) + (+b) = (+a) + (+c) + (+b)$ u. s. w.

c) Allgemeines Gesetz der Addition.

Es ist gleichgültig, in welcher Weise die Glieder einer Summe gruppiert, das heißt zu besondern Gruppen zusammengefaßt werden, und umgekehrt: Eine Summe von Summen ist gleich der Summe aus den Gliedern der letzteren; es ist also $(+a) + (+b) + (-c) = [(+a) +$

---

einer einzigen vereinigen, welche so viele Einheiten hat, als die gegebenen Zahlen zusammen.

*) Man lese: positiv 4, plus negativ 2, plus positiv 6, plus negativ 3. Die Plus- und Minuszeichen vor den Gliedern innerhalb der Klammern sind die Vorzeichen, die Pluszeichen zwischen den Gliedern dagegen sind Additionszeichen.

(+ b)] + (— c) = (+ a) + [(+ b) + (— c)]. — Diese unter b) und c) angeführten Sätze werden gewöhnlich als Grundsätze hingestellt, da sie ganz innig mit den Begriffen von Zahl und Summe zusammenhängen.

d) Folgerungen aus den Sätzen unter a, b und c.

1) Die Summe von zwei gleichen entgegengesetzten Zahlen ist Null; also (+ 8) + (— 8) = 0; denn zählt man von Null zuerst um eine gewisse Anzahl von Einheiten entweder auf- oder abwärts und dann um eben so viele Einheiten in entgegengesetztem Sinn zurück, so kommt man wieder bei Null an.

2) Der Wert einer Zahl ändert sich nicht, wenn man sie zu Null oder Null zu ihr addiert; also 0 + (— a) = — a; (+ b) + 0 = + b.

3) Gleichartige Zahlen werden addiert, indem man der Summe ihrer absoluten Zahlenwerte das gemeinschaftliche Vorzeichen gibt; also: (+ a) + (+ b) + (+ c) = +(a + b + c); (— a) + (— b) + (— c) = —(a + b + c); (+ 9) + (+ 6) + (+ 18) = + 33; (— 6) + (— 7) + (—10) = — (6 + 7 + 10) = — 23. — Veranschaulichende Beispiele: 9 ℳ und 6 ℳ und 18 ℳ Vermögen sind zusammen 33 ℳ Vermögen; 6 ℳ und 7 ℳ und 10 ℳ Schulden sind zusammen 23 ℳ Schulden.

4) Entgegengesetzte Zahlen werden addiert, indem man zunächst alle gleichartigen Zahlen addiert, sodann die kleinere Summe von der größeren subtrahiert und schließlich der entstandenen Differenz das Vorzeichen der größeren Summe gibt; also (+ 9) + (— 6) + (+ 12) + (— 2) = + ((9 + 12) — (6 + 2)) = (21 — 8) = + 13; (+ 6) + (— 10) + (+ 5) + (— 12) = — ((10 + 12) — (6 + 5)) = — (22 — 11) = — 11. — Veranschaulichende Beispiele: 9 ℳ Vermögen und 6 ℳ Schulden und 12 ℳ Vermögen und 2 ℳ Schulden geben ein Vermögen von 13 ℳ; 6 ℳ Vermögen und 10 ℳ Schulden und 5 ℳ Vermögen und 12 ℳ Schulden geben zusammen 11 ℳ Schulden.

5) Anstatt eine Zahl zu einer Summe zu addieren, kann man diese Zahl auch zu einem Gliede der Summe und das Ergebnis zu dem andern Gliede hinzufügen;

also: $[(+9) + (-5)] + (+10) = (+9) + [(-5) + (+10)] = [(+9) + (+10)] + (-5) = +14$ (Man vergleiche Satz c).

6) Anstatt eine Summe zu einer Zahl zu addieren, kann man auch die Glieder der Summe nacheinander zu dieser Zahl addieren; also $(+a) + [(+b) + (+c)] = [(+a) + (+b)] + (+c) = [(+a) + (+c)] + (+b)$. (Man vergleiche Satz c).

e) Begriff: Koefficient.

Um anzudeuten, daß eine und dieselbe Zahl mehrmals als Summand steht, setzt man dieser Zahl eine andere, welche angibt, wie oft jene als Posten vorhanden ist, unmittelbar voran und schreibt also 3a statt $a + a + a$, oder 3abc statt $abc + abc + abc$. Die dem (durch Buchstaben bezeichneten) gleichen Summanden vorgesetzte Zahl heißt der Koefficient desselben. Unter Koefficient einer Buchstabengröße versteht man demnach die vor derselben stehende, meist bestimmte Zahl, welche angibt wie oft diese Buchstabengröße als Summand vorhanden ist. Der Koefficient 1 wird nicht gesetzt; man schreibt also a statt 1a. Glieder, welche dieselben Buchstaben in derselben Verbindung haben, heißen gleichnamig, z. B. 4abc und 6abc.

f) Addition von Buchstabengrößen, die Koefficienten haben.

Es ist $3a = a + a + a$ und $2a = a + a$; mithin $3a + 2a = a + a + a + a + a$; hiefür kann man setzen 5a; also ist $3a + 2a = 5a$. Hieraus folgt: Gleichnamige Buchstabengrößen werden addiert, indem man ihre Koefficienten addiert und die erhaltene Summe der gemeinschaftlichen Buchstabengröße als Koefficient beisetzt. — Haben die zu addierenden Glieder verschiedene Buchstaben, so kann die Addition nur angedeutet werden; hiernach ist also 4a und $3b = (4a + 3b)$. Daß $4a + 3b$ nicht etwa gleich 7ab oder $7(a + b)$ ist, folgt unmittelbar aus der Bedeutung des Koefficienten 7 dieser Ausdrücke.

g) Begriff: Polynom.

Eine Zusammenstellung von positiven und negativen Zahlen heißt eine algebraische Summe, oder ein Polynom, oder ein

Aggregat, z. B. (6a — 3b + 5c). Die einzelnen positiven oder negativen Zahlen heißen die Glieder des Polynoms. Jedes Glied für sich heißt ein Monom (oder Mononomium, zusammengezogen aus Mononomium), eine Verbindung von zwei Gliedern ein Binom (oder Binomium), von drei Gliedern ein Trinom (oder Trinomium). So ist z. B. 3ab ein Monom, 4ab — 6cd ein Binom, 8ab — 7cd + 10mn ein Trinom. Binome und Trinome können schon als Polynome bezeichnet werden.

h) Addition von Polynomen.

Wie ein Polynom zu einer Zahl oder zu einem andern Polynom zu addieren ist, folgt aus Satz 6 unter d und aus Satz c. Auch ergibt sich aus letzterem, wie mehrere Polynome zu einander addiert werden. Kommen unter den einzelnen Gliedern derselben gleichnamige vor, so kann man dieselben zusammenfaßen. In diesem Fall schreibt man am bequemsten die gleichnamigen Glieder vertikal unter einander und addiert sodann.

B. Übungsaufgaben.

a) Aufgaben mit Auflösung.

1) $5a - 9b + 6a - 7b - 2a + 5b$*) $=$

$9a - 11b.$

2) $(7a - 8b + 5c) + (-9a + 11b - 13c) + (-20a + 24b - c) + (-2a - 3b + 7c) + (30a - 9c) = ?$

$$\begin{array}{rrr}
7a & - 8b & + 5c \\
-9a & + 11b & - 13c \\
-20a & + 24b & - c \\
-2a & - 3b & + 7c \\
30a & & - 9c \\
\hline
6a & + 24b & - 11c
\end{array}$$

Anmerkung. Um sich von der Richtigkeit einer Auflösung durch bestimmte Zahlen zu überzeugen, setze man sowohl in die gegebenen Ausdrücke der Aufgabe als in das Resultat derselben ganz beliebige bestimmte Zahlen und sehe zu, ob

*) Die vor den einzelnen Gliedern dieses Ausdrucks stehenden Plus- und Minuszeichen sind Vorzeichen; die Additionszeichen und die Klammern, worein bis jetzt größerer Deutlichkeit halber die einzelnen Glieder geschlossen wurden, kann man weglassen; selbst das Vorzeichen für die an der Spitze stehende Zahl kann wegbleiben, wofern es + ist.

in beiden Fällen für die Ausdrücke gleiche Zahlen erscheinen. Hiebei vergesse man nicht, daß z. B. 24ab nicht 24 + a + b, sondern 24 . a . b bedeutet.

b) Ungelöste Aufgaben.

Man vergleiche: Fuß, Sammlung von Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra, 2. Auflage, §. 1.

§. 12. Subtraktion.

A. Erklärungen und Lehrsätze.

a) Begriff der Subtraktion.

Von einer Zahl a eine andere Zahl b subtrahieren heißt, eine Zahl suchen, welche zur Zahl b addiert als Summe die Zahl a gibt. [1]) Die Zahl a, von welcher subtrahiert wird, heißt Minuend, die Zahl b, welche subtrahiert wird, Subtrahend und die gefundene dritte Zahl Differenz, Unterschied oder Rest. — Um die Zahl, welche zum Subtrahend addiert werden muß, damit sich der Minuend ergibt, zu finden, schreitet man vom Subtrahend aus in der allgemeinen Zahlenreihe in einem solchen Sinne fort, daß man dadurch den Minuend erreicht; die Anzahl der auf diese Weise zurückgelegten Schritte gibt den absoluten Zahlenwert und der Sinn des Fortschreitens (§. 10,7) das Vorzeichen der Differenz. Hiernach ist: (+ 9) — (+ 6) = + 3; denn um von + 6 zu + 9 zu gelangen, muß man 3 Schritte, und zwar im positiven Sinn machen; (+ 9) — (+ 12) = — 3; denn um von + 12 zu + 9 zu gelangen, müssen 3 Schritte im negativen Sinn gemacht werden; (— 12) — (— 16) = + 4; denn beim Fortschreiten von — 16 zu — 12 muß man 4 Schritte im positiven Sinn machen. — Bei der Ausführung dieses Verfahrens macht man die Wahrnehmung, daß die Zahl, welche zum Subtrahend addiert den Minuend gibt, auch erhalten wird, indem man das Entgegengesetzte des Subtrahendus zum Minuendus addiert. Daher kann man über das Subtrahieren auch die folgende Definition aufstellen: Subtrahieren heißt, das Entgegengesetzte des Subtrahendus zum Minuendus addieren.

---

[1]) In der bestimmten Arithmetik pflegt man diesen Begriff so zu definieren: Subtrahieren heißt, von einer gegebenen Zahl so viele Einheiten wegnehmen, als eine andere gegebene Zahl Einheiten hat.

Veranschaulichende Beispiele. Statt jemandem 50 ℳ. Vermögen zu nehmen, kann man ihm 50 ℳ. Schulden (die Verpflichtung so viel zu bezahlen) geben; statt ihm 50 ℳ. Schulden abzunehmen, kann man ihm 50 ℳ. Vermögen (die Schulden damit selber zu zahlen) geben.

b) Folgerungen aus den vorstehenden Definitionen.

1) Die Subtraktion führt man aus, indem man das Vorzeichen des Subtrahendus in das entgegengesetzte verwandelt und ihn dann zum Minuend addiert; also $(+ 70) - (+ 30) = 70 - 30 = 40$; $(- 4) - (+ 1) = - 4 - 1 = - 5$; $(- 15a) - (- 6a) = - 15a + 6a = - 9a$.

2) Eine algebraische Summe wird von einem Ausdruck subtrahiert, indem man ihre Glieder mit entgegengesetzten Vorzeichen zu demselben addiert; denn die Glieder einer algebraischen Summe sind positive oder negative Summanden, und für diese gilt der Satz, daß sie mit entgegengesetzten Vorzeichen addiert werden. Demnach ist: $a - (- b + c - d) = a + (+ b - c + d) = a + b - c + d$, oder $(4a - 5b + 6c - 8d) - (- 5a + 8b - 5c + 10d) = 4a - 5b + 6c - 8d + 5a - 8b + 5c - 10d = 9a - 13b + 11c - 18d$. In dem letzteren Fall kann man auch zweckmäßig den Subtrahend so unter den Minuend schreiben, daß gleichnamige Glieder unter einander zu stehen kommen, nämlich:

$$\begin{array}{rrrr} 4a & - 5b & + 6c & - 8d \\ - 5a & + 8b & - 5c & + 10d \\ (+) & (-) & (+) & (-) \\ \hline 9a & - 13b & + 11c & - 18d \end{array}$$

3) Die Subtraktion ist fortan überflüßig, kann also in der Arithmetik nun ganz ausfallen und immer durch eine Addition des Entgegengesetzten ersetzt werden; es ist nämlich $a - (+ b)$ oder $a - b = a + (- b)$. Mithin ist auch $a - b - c + d - e = (+ a) + (- b) + (- c) + (+ d) + (- e)$, d. h. die Zeichen + und — sind Vorzeichen, die einzelnen Glieder also positive oder negative Summanden; das Additionszeichen wird weggelassen.

c) Klammerregeln.

Die zu addierenden oder zu subtrahierenden algebraischen Summen müssen in Klammern eingeschlossen werden. Diese fallen mit

der Ausführung der angezeigten Addition und Subtraktion weg. Betrachtet man die hiebei erhaltenen Resultate genauer, so findet man, daß bei der Addition einer algebraischen Summe lediglich die Klammer wegfällt, die Vorzeichen der einzelnen Glieder aber dieselben bleiben, während bei der Subtraktion einer algebraischen Summe jedem einzelnen Glied derselben das entgegengesetzte Vorzeichen gegeben wird, nachdem man die Klammer und das vor ihr stehende Zeichen — weggelassen hat. Man merke sich daher folgende zwei Regeln: Steht ein + vor einer Klammer, welche eine algebraische Summe umschließt, so kann man die Klammer ohne weiteres weglassen; steht dagegen ein — vor einer Klammer, welche eine algebraische Summe umschließt, so läßt man die Klammer und das Zeichen — vor derselben weg und gibt jedem Gliede in derselben das entgegengesetzte Vorzeichen. Aus der letzteren Regel folgt unmittelbar die weitere: Sollen Glieder in eine Klammer gebracht werden, vor welcher ein — steht, so muß man vorher die Zeichen derselben in die entgegengesetzten verwandeln. — Kommen in einer Klammer neue Klammern vor, so löse man zuerst die inneren und dann die äußeren auf.

d) Anmerkung.

In vielen Lehrbüchern der allgemeinen Arithmetik kommen bei Behandlung der Subtraktion Lehrsätze über folgende Punkte zur Besprechung: wie man Summen und Differenzen subtrahiert und wie von Summen und Differenzen zu subtrahieren ist, ferner wie Differenzen zu addieren und endlich wie sie zu subtrahieren sind. Die folgenden Gleichungen drücken diese Beziehungen aus:

1) $a - (b + c) = (a - b) - c = (a - c) - b$

2) $a - (b - c) = (a - b) + c = (a + c) - b$

3) $(a + b) - c = a + (b - c) = b + (a - c)$

4) $(a - b) - c = a - (b + c) = (a - c) - b$

5) $(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$

6) $(a - b) - (c - d) = (a - c) - (b - d)$.

In Worten ausgedrückt: 1) Statt eine Summe zu subtrahieren, kann man nach einander jeden Summanden subtrahieren, z. B. $100 - (20 + 4) = (100 - 20) - 4 =$

80 — 4 = 76, oder (100 — 4) — 20 = 96 — 20 = 76. — 2) Anstatt eine Differenz von einer Zahl zu subtrahieren, kann man auch ihren Minuend subtrahieren und den Subtrahend addieren, in beliebiger Folge dieser beiden Operationen, z. B. 844 — 97 = 844 — (100 — 3) = 844 — 100 + 3 = 744 + 3 = 747, oder 875 — 196 = 875 — (200 — 4) = 875 — 200 + 4 = 675 + 4 = 679; man benützt also, wie diese Beispiele zeigen, den Satz 2 um Zahlen wie 97, 197, 289 und ähnliche Zahlen zu subtrahieren, man faßt dieselben nämlich als die Differenzen 100 — 3, 200 — 3, 300 — 11 auf. — 3) Anstatt eine Zahl von einer Summe zu subtrahieren, kann man auch die Zahl zuerst von dem einen Summanden subtrahieren. Von diesem Satz macht man beim Rechnen in Beispielen folgender Art Gebrauch: 49 — 8 = (40 + 9) — 8 = 40 + (9 — 8) = 40 + 1 = 41, oder 954 — 33 = (900 + 54) — 33 = 900 + (54 — 33) = 921. u. s. w.

Die Richtigkeit der vorstehenden Gleichungen ergibt sich unmittelbar aus den Sätzen über Addition und Subtraktion der entgegengesetzten Zahlen in Verbindung mit den Sätzen b) und c) in §. 11, und zwar ganz allgemein.

B. Übungsaufgaben.

a) Aufgaben mit Auflösung.

1) 20 — (3 — (4 + 5) — 6 — (9 + 8)).
Die schw. r. Kl. aufgelöst: 20 — (3 — 4 — 5 — 6 — 9 — 8)
Die str. r. Kl. aufgelöst: 20 — 3 + 4 + 5 + 6 + 9 + 8
Addiert: 49.

2) 16a + (3b — 2c) — (7a + (2b — 5c) — (9b + 8c))
D. sch. r. Kl. aufg.: 16a + 3b — 2c — (7a + 2b — 5c — 9b — 8c)
D. st. r. Kl. aufg.: 16a + 3b — 2c — 7a — 2b + 5c + 9b + 8c
D. gln. Gl. zusammengezogen: 9a + 10b + 11c.

b) Ungelöste Aufgaben.

Man vergleiche: Fuß, Sammlung von Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra, 2. Auflage, §. 2. *)

*) Das Interesse der Schüler für den mathematischen Unterricht wächst mit deren Einsicht in die Nützlichkeit desselben. Es ist daher nötig, daß man beim

§. 13. Multiplikation.

A. Erklärungen und Lehrsätze.

a) Begriff der Multiplikation.

1) Eine absolute Zahl a mit einer absoluten Zahl b multiplicieren heißt, a so viel mal als Teil oder Summanden setzen, als b Einheiten enthält. Die Zahl a heißt Multiplikand, b Multiplikator und das Ergebnis der Multiplikation das Produkt. Multiplikand und Multiplikator heißen mit einem gemeinschaftlichen Namen Faktoren. Die Multiplikation der Zahl a mit der Zahl b deutet man an durch a × b, a · b oder ab (gelesen: „a multipliciert mit b," kürzer „a mal b"; letzteres soll heißen a b mal genommen). Es wird also der Multiplikand vorangestellt, nur wenn der Multiplikator eine bestimmte, der Multiplikand eine allgemeine Zahl ist, pflegt man den ersteren unter dem Namen Koefficient voranzustellen, z. B. in 3a. — Der obigen Definition zufolge läßt sich jedes Produkt darstellen als eine Summe aus lauter gleichen Summanden, von denen der einzelne gleich ist dem Multiplikand; hiernach ist also $3 \cdot 4 = 3 + 3 + 3 + 3$

Unterricht die Anwendung, den Zweck der mathematischen Lehren durchblicken läßt. Dies ist schon auf dieser Stufe des Unterrichts möglich, nämlich dadurch, daß man dem Schüler zeigt, wie er mit den bereits erworbenen Kenntnissen leichte Bestimmungsgleichungen auflösen kann. Nach einer kurzen Belehrung über das Wesen der Bestimmungsgleichungen, ihre Auflösung und Bildung nach §. 43 und 45 dieses Lehrbuchs kann man daher die Gleichungen unter Ia, in §. 31 der Aufgabensammlung auflösen und die Textaufgaben 1—12 in §. 32 der Aufgabensammlung durch Gleichungen berechnen lassen. Ja man kann sogar schon die in §. 33 unter Ia, von 1—12 enthaltenen Gleichungen mit 2 Unbekannten, sowie die leichteren Aufgaben in §. 34 zur Übung benützen, wenn man zur Entfernung der Unbekannten die Additions- und Subtraktionsmethode anwendet. Man wird finden, daß die Auflösung von Bestimmungsgleichungen das Interesse der Schüler belebt und erhöht, da sie denselben Gelegenheit bietet, ihre Kraft zu erproben. — In der Folge wird an verschiedenen Stellen auf diejenigen Gleichungen verwiesen werden, die auf der betreffenden Unterrichtsstufe aufgelöst werden können. Hiedurch läßt sich neben dem eben angeführten Zweck auch noch der erreichen, daß die Aufgaben mehr nach ihrem inneren Zusammenhang und nach Graden der Schwierigkeit angeordnet werden.

und ab = a + a + a . . . . b mal (die Punkte . . . . sind das Zeichen für „und so weiter bis“).

2) Für algebraische Zahlen erleidet obige Definition folgende Erweiterung: Multiplicieren heißt, wenn der Multiplikator positiv ist, den Multiplikand selbst, wenn aber der Multiplikator negativ ist, das Entgegengesetzte des Multiplikandus so viel mal als Teil setzen, als der Zahlenwert des Multiplikators angibt.*)

b) Gesetze über die Multiplikation algebraischer Zahlen.

Der gegebenen Definition gemäß ist: 1) (+ a) · (+ b) = + ab; das heißt, zwei positive Zahlen, mit einander multipliciert, geben ein positives Produkt. — 2) (— a) · (+ b) = — ab; das heißt, eine negative Zahl, mit einer positiven multipliciert, gibt ein negatives Produkt. — 3) (+ a) · (— b) = — ab; das heißt, eine positive Zahl, mit einer negativen multipliciert, gibt ein negatives Produkt. — 4) (— a) · (— b) = + ab; das heißt, das Produkt zweier negativer Zahlen ist positiv. — Man pflegt diese vier Sätze in folgendes Gesetz zusammenzufassen: Gleiche Zeichen der Faktoren geben für das Produkt das Zeichen +, ungleiche Zeichen geben —, oder noch kürzer, Gleiche Zeichen geben +, ungleiche —.

Bemerkung zu vorstehenden Sätzen. 1) (+ a) · (+ b) bedeutet, daß, da der Multiplikator (+ b) positiv ist, der Multiplikand + a im wirklichen oder direkten Sinn b mal als Teil zu setzen ist. Das Resultat ist also + ab. — 2) Da in dem Produkt (— a) · (+ b) der Multiplikator positiv ist, so stellt dasselbe die Forderung, den Multiplikand — a im direkten Sinne b mal als Summand zu setzen; also (— a) · (+ b) = (— a) + (— a) + (— a) + ... b mal. Dies gibt aber — ab. — 3) In dem Produkt (+ a) · (— b) ist der Multiplikator (— b) negativ; es bezeichnet daher, daß der positive Multiplikand (+ a) im inversen (entgegengesetzten) Sinn b mal als Summand gesetzt werden soll; das Resultat ist also — ab. — 4) Das Produkt (— a) · (— b) hat, da der Multiplikator negativ ist, fol-

*) Wittstein, Lehrbuch der Arithmetik.

genden Sinn: der negative Multiplikand soll im inversen Sinn aufgefaßt b mal als Summand gesetzt werden; das Resultat ist also + ab. — Auch von folgendem Gesichtspunkt aus lassen sich die in Frage stehenden Sätze begründen: Multiplicieren heißt, das Produkt so aus dem Multiplikand entstehen lassen, wie der Multiplikator durch wiederholtes Setzen der positiven Einheit oder eines Teiles derselben oder durch wiederholtes Setzen der Entgegengesetzten der positiven Einheit oder eines Teiles derselben entstanden gedacht werden kann. *)

c) Allgemeines Gesetz der Multiplikation.

Der Wert eines Produkts bleibt ungeändert, wenn Multiplikand und Multiplikator desselben mit einander vertauscht werden.

Beweis. Die Richtigkeit des soeben ausgesprochenen Satzes soll zunächst für zwei bestimmte Zahlen, z. B. 3 · 4 gezeigt werden. Es ist also zu beweisen, daß 3 · 4 = 4 · 3 ist. Zu dem Zweck zerfällen wir den Multiplikand in seine 3 Einheiten und setzen diese 3 Einheiten 4 mal hin, nämlich:

---

*) Der Satz, daß bei der Multiplikation gleiche Zeichen +, ungleiche — geben läßt sich durch ein Zahlenbeispiel auch in folgender Weise erläutern. Es sei z. B. 7 – 5 (= 2) mit 9 – 6 (= 3) zu multiplicieren, in Zeichen also: (7—5) (9—6). Man nimmt nun den Multiplikand erst 9 mal, also (7—5) . 9; das gibt 63—45; denn nimmt man zunächst 7 . 9, was 63 ist, so hat man, da nicht das 9fache von 7, sondern von 7—5 zu nehmen ist, 5 . 9 = 45 zu viel genommen; man muß mithin von 63 die Zahl 45 subtrahieren. Der Multiplikand 7—5 soll aber nicht 9 mal, sondern (9 – 6) mal genommen werden, also wurde er 6 mal zu oft genommen; deshalb muß von (7 – 5) . 9 = 63 — 45 das 6fache von 7—5, also (7—5) . 6 subtrahiert werden. Subtrahiert man zunächst 7 . 6 = 42, so hat man, da nicht 7 . 6, sondern (7 — 5) . 6 subtrahiert werden soll, 5 . 6 = 30 zu viel subtrahiert; 30 muß also wieder zu 63 — 45 — 42 addiert werden; also 63 — 45 — 42 + 30 = 6. Dasselbe Resultat muß sich ergeben, wenn man (7 – 5) als (+ 7) + (– 5) und 9 – 6 als (+ 9) + (– 6) auffaßt. Es ist dann also + 7 . + 9 = + 63, — 5 . + 9 = — 45, + 7 . — 6 = — 42 und — 5 . — 6 = + 30. In ähnlicher Weise führe man auch das Beispiel — 4 . — 3 durch, indem man (0 — 4) . (0 — 3) multipliciert.

$$\begin{array}{r} 1 + 1 + 1 \\ + 1 + 1 + 1 \\ + 1 + 1 + 1 \\ + 1 + 1 + 1 \end{array}$$

Nun stehen in horizontaler Reihe 3 Einheiten und solcher Reihen sind 4 vorhanden, und in vertikaler Reihe stehen 4 Einheiten und solcher Reihen sind 3 vorhanden. Faßt man nun erst die horizontal neben einander stehenden Einer zu einer Summe (3) zusammen und addiert diese Partialsummen, so ergibt sich $3 \cdot 4$. Faßt man aber zuerst die vertikal unter einander stehenden Einer zusammen (4) und addiert diese Partialsummen, so ergibt sich $4 \cdot 3$. Diese beiden Ergebnisse sind offenbar der ganzen Summe der hier stehenden Einer und folglich auch einander gleich, denn die Reihenfolge der Summanden ist beliebig. — Da dasselbe für alle anderen Zahlen bewiesen werden kann, so kann man allgemein setzen $a \cdot b = b \cdot a$.

d) Bildung des Produkts aus drei und aus mehr als drei Zahlen.

1) Wenn drei oder mehrere Zahlen mit einander multipliciert werden sollen, so ist es einerlei, in welcher Ordnung man dieselben multipliciert, oder: die Reihenfolge der Faktoren eines Produkts ist beliebig.

Beweis. Es seien zunächst drei Zahlen, a, b und c, mit einander zu multiplicieren. Hiebei soll es nun, wie der Lehrsatz behauptet, einerlei sein, ob man rechnet $(a \cdot b) \cdot c$, oder $(b \cdot a) \cdot c$, oder $c \cdot (a \cdot b)$, oder $c \cdot (b \cdot a)$, oder $a \cdot (b \cdot c)$, oder $(b \cdot c) \cdot a$ Daß $(a \cdot b) \cdot c = (b \cdot a) \cdot c = c \cdot (a \cdot b) = c \cdot (b \cdot a)$ ist, folgt aus Satz c dieses §. Es ist also nur noch zu zeigen, daß auch das Produkt, welches man erhält, wenn man c mit einer der beiden Zahlen a und b multipliciert und das so erhaltene Produkt noch mit der andern dieser Zahlen vervielfacht, jedem der vier vorstehenden Produkte gleich ist. Setzt man statt c eine bestimmte Zahl, z. B. 4, so erhält man statt $(a \cdot b) \cdot c$ das Produkt $(a \cdot b) \cdot 4$. Dieses ist nach der Erklärung der Multiplikation so viel als $a \cdot b + a \cdot b + a \cdot b + a \cdot b$. Hiefür kann man setzen $a \cdot (b + b + b + b)$ oder kürzer $a \cdot (b \cdot 4)$, oder $a \cdot (4 \cdot b)$. Es ist also $(a \cdot b) \cdot 4 = a \cdot (b \cdot 4) = a \cdot (4 \cdot b)$. — Da dasselbe für jeden andern Wert von c erwiesen werden kann, so kann man allgemein setzen $(a \cdot b) \cdot c$

$= (b \cdot c) \cdot a$. Aus dem Vorstehenden geht hervor, daß bei der Multiplikation dreier Zahlen die Ordnung der Faktoren beliebig ist. Daher kann man auch die Klammern weglassen und schreiben: $a \cdot b \cdot c = a \cdot c \cdot b = b \cdot a \cdot c = b \cdot c \cdot a = c \cdot a \cdot b = c \cdot b \cdot a$. Für mehr als drei Faktoren kann der Beweis in ähnlicher Weise geführt werden. — Aus diesem Satz ergeben sich nachstehende Folgerungen:

α) Ein Produkt wird mit einer Zahl multipliciert, indem man einen, beliebig welchen, aber nur einen Faktor multipliciert, also $(ab)c = (ac)b = a(bc)$. Dieses Gesetz findet in der bestimmten Arithmetik bei Aufgaben folgender Art Anwendung: $2300 \cdot 5 = (23 \cdot 100) \cdot 5 = (23 \cdot 5) \cdot 100 = 115 \cdot 100 = 11500$.

β) Eine Zahl wird mit einem Produkt multipliciert, indem man erst mit dem einen Faktor multipliciert und das daraus entstandene Produkt mit dem andern, also $a(mn) = (am)n = (an)m$. Von diesem Gesetz macht man im gewöhnlichen Rechnen folgenden Gebrauch: $432 \cdot 42 = 432 \cdot (7 \cdot 6) = (432 \cdot 7) \cdot 6 = 3024 \cdot 6 = 18144$.

2) Eine gerade Anzahl sowohl positiver als negativer Faktoren gibt ein positives Produkt, eine ungerade Anzahl positiver Faktoren gibt ein positives, eine ungerade Anzahl negativer Faktoren ein negatives Produkt; also $(-2) \cdot (-3) \cdot (-4) = -24$.

Anmerkung. Kommt eine und dieselbe Zahl mehrmals als Faktor vor, so schreibt man sie, kürzerer Schreibweise wegen, nur einmal, und fügt ihr rechts oben eine Zahl bei, welche anzeigt, wie oft die Zahl als Faktor vorhanden ist. Hiernach ist $4 \cdot 4 = 4^2$, $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$, oder $a^3 = a \cdot a \cdot a$ (gelesen: 4 hoch 2, 4 hoch 3, a hoch 3).

e) Multiplikation von Monomen, die Koefficienten haben.

Monome werden mit einander multipliciert, indem man dem Produkt ihrer Koefficienten das der einzelnen Buchstaben als Faktor hinzufügt.

Beweis. Jedes Monom besteht aus zwei oder mehreren, teils numerischen, teils litteralen Faktoren. Da nun nach Satz d die Reihenfolge der Faktoren eines Produkts beliebig ist, so darf man die numerischen Faktoren der einzelnen Monome von den Buchstaben-

faktoren absondern und erstere durch ihr Produkt ersetzen, also $3a \cdot 2b = 3 \cdot a \cdot 2 \cdot b = 3 \cdot 2 \cdot a \cdot b = 6ab$, oder $3ab \cdot 5a \cdot 4d = 3 \cdot a \cdot b \cdot 5 \cdot a \cdot 4 \cdot d = 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot d = 60a^2bd$. Die Buchstabenfaktoren pflegt man in alphabetischer Ordnung hinzuschreiben.

f) *Multiplikation eines Polynoms mit einem Monom.*

1) *Ein Polynom wird mit einem Monom multipliciert, indem man alle Glieder des Polynoms mit dem Monom multipliciert und die Teilprodukte addiert.*

Behauptung. $(a + b + c) m = am + bm + cm$.

Beweis. Setzt man zunächst statt m eine bestimmte Zahl, z. B. 4, so erhält man $(a + b + c) \cdot 4$. Dem Begriff des Produkts gemäß ist dies $(a + b + c) + (a + b + c) + (a + b + c) + (a + b + c)$. Da nun Summen addiert werden, indem man die Glieder der einen Summe zu denen der anderen Summe in beliebiger Reihenfolge addiert, so kann der letztere Ausdruck auch so geordnet werden $a + a + a + a + b + b + b + b + c + c + c + c$. Nun kann man aber setzen: $4a$ statt $a + a + a + a$, $4b$ statt $b + b + b + b$, $4c$ statt $c + c + c + c$. Hiernach erhält man als Produkt $4a + 4b + 4c$. Da dasselbe für jeden andern bestimmten Faktor bewiesen werden kann, so kann man allgemein setzen $(a + b + c) m = am + bm + cm$. — Allgemein ausgeführt, heißt der Beweis: $(a + b + c)m = (a + b + c) + (a + b + c) + (a + b + c) \dots$ m mal $= (a + a + a \dots$ m mal$) + (b + b + b \dots$ m mal$) + (c + c + c \dots$ m mal $= am + bm + cm$, w. z. b. w.

2) *Umkehrung des vorigen Satzes.* Wird die Gleichung $(a + b + c) m = am + bm + cm$ rückwärts gelesen, so erhält man folgenden Satz: *Haben die Glieder eines Polynoms einen gemeinschaftlichen Faktor, so addiert man die ungleichen Faktoren und multipliciert die so gebildete Summe mit dem gemeinschaftlichen Faktor.* Dieses Verfahren nennt man die *Ausscheidung eines gemeinschaftlichen Faktors.*

3) *Anmerkung.* Die in den meisten Lehrbüchern der allgemeinen Arithmetik enthaltenen Gesetze über die Multiplikation von Summen und Differenzen mit ganzen Zahlen ergeben sich von selbst aus Satz 1.

Diese zwei Gesetze heißen: a) Eine Summe wird mit einer Zahl multipliciert, indem man jeden Summanden mit der Zahl multipliciert und die erhaltenen Produkte addiert, also $(a + b)\,c = ac + bc$. Von diesem Gesetz macht man beim gemeinen Rechnen folgenden Gebrauch: $74 \cdot 8 = (70 + 4) \cdot 8 = 70 \cdot 8 + 4 \cdot 8 = 560 + 32 = 592$. — b) Eine Differenz wird mit einer Zahl multipliciert, indem man den Minuend und Subtrahend mit der Zahl multipliciert und das letztere Produkt von dem ersteren subtrahiert, also $(a - b)\,c = ac - bc$. Nach diesem Satze multipliciert man z. B. 97 und 8, nämlich $(100 - 3) \cdot 8 = 100 \cdot 8 - 3 \cdot 8 = 800 - 24 = 776$.

g) Multiplikation eines Polynoms mit einem Polynom.

1) Ein Polynom wird mit einem Polynom multipliciert, indem man jedes Glied des einen Polynoms mit jedem des andern multipliciert und die Teilprodukte addiert.

Behauptung. $(3a + 4b)(5c + 6d) = 15ac + 18ad + 20bc + 24bd$.

Beweis. Setzt man zunächst $3a + 4b = p$, so erhält man: $p\,(5c + 6d)$. Dies ist nach Satz f gleich: $5cp + 6dp$. In diesen Ausdruck für p den Wert $3a + 4b$ eingeführt, kommt: $5c\,(3a + 4b) + 6d\,(3a + 4b) = 15ac + 20bc + 18ad + 24bd = 15ac + 18ad + 20bc + 24bd$, w. z. b. w.

2) Wenn unter den Teilprodukten gleichnamige vorkommen, so schreibt man dieselben unter einander und zieht sie durch Addition zusammen, z. B.

$$\begin{aligned}(a + b)(a + b) &= a^2 + ab \\ &\quad\; + ab + b^2 \\ \hline &= a^2 + 2ab + b^2.\end{aligned}$$

3) Sollen mehr als zwei Polynome mit einander multipliciert werden, so sucht man zuerst das Produkt aus zwei Polynomen, multipliciert das erhaltene Produkt mit dem dritten Polynom u. s. w.

4) Auf dem unter 1) angeführten Satz beruht das Verfahren, welches in der bestimmten Arithmetik bei der Multiplikation zweier mehrstelliger Zahlen eingeschlagen wird, z. B. $85 \cdot 24 = (80 + 5) \cdot (20 + 4) = 80 \cdot (20 + 4) + 5 \cdot (20 + 4)$ u. s. w. oder $97 \cdot$

$48 = (100 - 3) \cdot (50 - 2) = 100 \cdot (50 - 2) - 3\,(50 - 2)$ u. s. w.

h) Multiplikation der Null mit einer Zahl und mit Null.

1) Ist einer der Faktoren Null, so ist auch das Produkt Null.

Behauptung. $a \cdot 0 = 0$.

Beweis. Die Null kann als eine Differenz angesehen werden, in welcher Minuend und Subtrahend gleich sind, oder als die Summe aus einer Zahl und dem Entgegengesetzten derselben, also kann man z. B. setzen $m - m = 0$. Statt $a \cdot 0$ erhält man daher $a \cdot (m - m) = am - am = 0$.

2) Das Produkt zweier Nullen ist Null (Beweis ähnlich wie bei 1).

B. Übungsaufgaben.

a) Aufgaben mit Auflösung.

1) $5ab \cdot -3ab = -15a^2b^2$.

2) $(3a + 4b)5c = 15ac + 20bc$.

3) $(4m - 5n + 7p + 8q) \cdot -6x = -24mx + 30nx - 42px - 48qx$.

4) $(3a - 4b + 5c)(-6a + 9b - 11c) =$

$$\begin{array}{llllll} -18a^2 & +24ab & -30ac & & & \\ & +27ab & & -36b^2 & +45bc & \\ & & -33ac & & +44bc & -55c^2 \\ \hline = -18a^2 & +51ab & -63ac & -36b^2 & +89bc & -55c^2. \end{array}$$

5) $3a^2 + (3a + 4b)5a - (8a - 7b)6a - (5a - b)2a = ?$

Ausmultipliciert: $3a^2 + (15a^2 + 20ab) - (48a^2 - 42ab) - (10a^2 - 2ab)$;

Die Kl. gelöst: $3a^2 + 15a^2 + 20ab - 48a^2 + 42ab - 10a^2 + 2ab$;

Zusammengezogen: $-40a^2 + 64ab$, oder $64ab - 40a^2$.

Erläuterung. Die Ausdrücke der vorstehenden Aufgabe sind algebraische Summen, deren Glieder zusammengesetzte Produkte bilden. So nennt man Produkte, in welchen ein Faktor oder mehrere Fakoren algebraische Summen sind. Werden die angedeuteten Operationen ausgeführt, so erhält man eine algebraische Summe, deren Glieder sämtlich einfache Produkte bilden. Da bei der Auflösung derartiger Aufgaben leicht Fehler gemacht werden können, so ist es dem Anfänger zu empfehlen, zunächst die Multiplikationen auszuführen, die erhaltenen Produkte in die entsprechenden Klammern zu schreiben und diese schließlich aufzulösen.

6) $(3a + 4b)(2a - 3b) - (5a - b)(7a + 2b) + (6a + 8b)(9a + b) = ?$

Ausmult.: $(6a^2 - ab - 12b^2) - (35a^2 + 3ab - 2b^2) + (54a^2 + 78ab + 8b^2)$;

Kl. gel.: $6a^2 - ab - 12b^2 - 35a^2 - 3ab + 2b^2 + 54a^2 + 78ab + 8b^2$;

Durch Add. vereinigt: $25a^2 + 74ab - 2b^2$.

Nebenrechnungen.

1) $(3a + 4b)(2a - 3b) = 6a^2 - 9ab + 8ab - 12b^2 = 6a^2 - ab - 12b^2$

2) $(5a - b)(7a + 2b) = 35a^2 + 10ab - 7ab - 2b^2 = 35a^2 + 3ab - 2b^2$

3) $(6a + 8b)(9a + b) = 54a^2 + 6ab + 72ab + 8b^2 = 54a^2 + 78ab + 8b^2$.

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabensammlung, §. 3, ferner können aufgelöst werden die Gleichungen in §. 31 unter Ib), sowie leichtere Aufgaben in §. 32. Vergleiche Fußnote auf Seite 22.

§. 14. Division.

A. Erklärungen und Lehrsätze.

a) Begriff der Division.

Eine Zahl a durch eine andere Zahl b dividieren heißt, eine dritte Zahl suchen, welche mit b multipliciert die Zahl a als Produkt gibt. Die Zahl, welche dividiert werden soll, heißt der Dividend, die Zahl, mit welcher man dividiert, der Divisor und das Resultat der Division der Quotient. Das Zeichen der Division ist ein Doppelpunkt oder ein Querstrich; das erstere Zeichen setzt man so, daß der Dividend vor und der Divisor nach demselben steht, also a : b (gelesen: „a dividiert durch b"); wendet man den Querstrich als Divisionszeichen an, so wird über denselben der Dividend und unter denselben der Divisor gesetzt.

b) Folgerungen aus vorstehender Definition.

1) Das Produkt aus dem Divisor und dem Quotienten ist gleich dem Dividend (Probe der Division).

2) Jede Zahl durch sich selbst dividiert gibt Eins zum Quotienten, also $a : a = 1$; denn $1 \cdot a = a$.

3) Null durch irgend eine Zahl dividiert gibt Null, also $0 : a = 0$; denn $0 \cdot a = 0$.

4) Eine Zahl bleibt unverändert, wenn man sie mit einer andern Zahl multipliciert und das erhaltene Produkt wieder durch dieselbe Zahl dividiert, oder wenn man sie mit der nämlichen Zahl dividiert und multipliciert.

5) Der Quotient aus zwei positiven und auch aus zwei negativen Zahlen ist positiv; der Quotient aus einer positiven und einer negativen Zahl ist negativ. Kürzer ausgedrückt: Gleiche Zeichen (des Dividendus und des Divisors) geben (für den Quotienten) das Vorzeichen +, ungleiche Zeichen geben —. Demnach ist: $(+24) : (+4) = +6$; denn $(+6) \cdot (+4) = +24$; $(-24) : (-4) = +6$; denn $(+6) \cdot (-4) = -24$; $(-24) : (+4) = -6$; denn $(-6) \cdot (+4) = -24$.

c) Die zwei Arten der Division.

Die Division ist die umgekehrte Operation der Multiplikation. Daraus folgt, daß die Division entweder darin bestehen kann, aus Produkt und Multiplikator den Multiplikand zu finden, oder darin, aus Produkt und Multiplikand den Multiplikator zu finden. Da der Multiplikator seiner Natur nach unbenannt ist, so muß in dem ersten dieser beiden Fälle der Divisor, der eigentliche Multiplikator, unbenannt sein; der Quotient aber, als Multiplikand, ist gleichbenannt mit dem Dividend, dem Produkt, z. B. 24 ℳ : 4 = 6 ℳ. Im zweiten Fall dagegen ist der Divisor, als Multiplikand, immer gleichbenannt mit dem Dividendus, dem Produkt, der Quotient aber, als Multiplikator immer unbenannt, z. B. 24 ℳ : 4 ℳ = 6. In jenem Fall wird der Quotient gefunden, indem man den Dividendus in so viele gleiche Teile teilt, als der Divisor anzeigt (teilende Division, oder Division im Sinne des Teilens); in diesem Falle dagegen, indem man untersucht, wie viel mal sich der Divisor aus dem Dividend heraus nehmen, von ihm subtrahieren lasse, oder wie vielmal der Divisor im Dividend enthalten ist (vergleichende oder messende Division, oder Division im Sinne des Enthalten-

seins). Sind Divisor und Dividend unbenannt, so ist die Auffaßung der Divisionsaufgabe eine beliebige. — In dem vorliegenden § wird vorausgesetzt, daß der Divisor im Dividend ohne Rest enthalten sei.

d) Division eines Produkts durch eine Zahl.

Ein Produkt wird durch eine Zahl dividiert, indem man einen der Faktoren des Produkts durch diese Zahl dividiert und den erhaltenen Quotienten mit dem andern Faktor multipliciert.

Behauptung. $\frac{ab}{m} = \frac{a}{m} \cdot b = a \cdot \frac{b}{m}$

Beweis. Es ist hier zu beweisen, daß $[(a : m) \cdot b] \cdot m = ab$ ist. Da die Stellung der Faktoren beliebig ist, so kann man das Produkt $[(a : m) \cdot b] \cdot m$ auch so schreiben $[(a : m) \cdot m] \cdot b$, und dies ist nach Satz 4) unter b) dieses § gleich ab. In ähnlicher Weise läßt sich zeigen, daß $[a \cdot (b : m)] \cdot m = ab$ ist.

e) Division durch ein Produkt.

1) Durch ein Produkt wird dividiert, indem man erst durch den einen Faktor und den entstandenen Quotienten durch den andern Faktor dividiert.

Behauptung. $a : (m \cdot n) = (a : m) : n = (a : n) : m$.

Beweis. Es ist hier zu beweisen, daß $[(a : m) : n] \cdot mn = a$ ist. Da die Ordnung der Faktoren beliebig ist, so kann man statt $[(a : m) : n] \cdot m \cdot n$ auch setzen $[(a : m) : n] \cdot n \cdot m$, und hiefür nach Satz 4) unter b) dieses § den kürzeren Ausdruck $(a : m) \cdot m$, was nach demselben Satz $= a$ ist. — Von dem vorstehenden Satz macht man in der bestimmten Arithmetik Gebrauch, wenn eine Zahl durch eine andere, die sich in Faktoren zerlegen läßt, dividiert werden soll, z. B. $216 : 24 = 216 : (6 \cdot 4) = (216 : 6) : 4 = 36 : 4 = 9$.

2) Ein Produkt wird durch ein Produkt dividiert, indem man durch jeden Faktor des Divisors einen, beliebig welchen, aber nur einen Faktor des Dividend dividiert. Die Richtigkeit dieses Satzes folgt unmittelbar aus Satz d) und e).

f) Division eines Monoms durch ein Monom.

Zwei Monome werden durch einander dividiert, indem man zunächst die Koefficienten für sich dividiert,

sodann die Buchstabenfaktoren und beide Quotienten als Faktoren neben einander setzt.

Behauptung. 12abmn : 3ab = 4 · mn = 4mn.

Beweis. Derselbe ist in Satz 2 unter e) dieses § enthalten. Die Richtigkeit dieses Verfahrens geht einfach auch daraus hervor, daß man die Faktoren, die Dividend und Divisor gemein haben, weglassen darf, ohne den Wert des Quotienten zu verändern.

g) Division eines Polynoms durch ein Monom.

Ein Polynom wird durch ein Monom dividiert, indem man jedes einzelne Glied des Polynoms durch das Monom dividiert und die erhaltenen Quotienten addiert.

Behauptung. (9ab — 12ac + 15ad) : 3a = 3b — 4c + 5d.

Beweis. Zum Beweise multipliciert man den erhaltenen Quotient mit dem Divisor.

Anmerkung. Aus dem vorigen Satz folgt auch, wie eine zweigliedrige Summe und eine Differenz durch eine Zahl zu dividieren sind. Anwendungen dieser zwei Sätze sowie des vorigen Satzes in der bestimmten Arithmetik sind z. B. 165 : 5 = (150 + 15) : 5 = 150 : 5 + 15 : 5 = 30 + 3 = 33 oder 297 : 3 = (300 — 3) : 3 = 100 — 1 = 99.

h) Division eines Polynoms durch ein Polynom.

Um das Verfahren, das bei der Division eines Polynoms durch ein anderes Polynom einzuschlagen ist, aufzufinden, wollen wir zunächst das Polynom, das wir dividieren wollen, aus zwei Polynomen durch Multiplikation entstehen lassen. Die beiden Polynome seien (— 6a + 9b — 11c) und (3a — 4b + 5c). Beide mit einander multipliciert, erhält man:

— 6a	+ 9b	— 11c (I. Faktor)				
3a	— 4b	+ 5c (II. Faktor)				
— 18aa	+ 27ab	— 33ac (1. Teil)				
	+ 24ab		— 36bb	+ 44bc (2. Teil)		
		— 30ac		+ 45bc	— 55cc (3. Teil)	
— 18aa	+ 51ab	— 63ac	— 36bb	+ 89bc	— 55cc	

Das hier stehende Produkt besteht aus 3 Teilen: der erste Teil enthält das Produkt aus dem I. Faktor und dem ersten Glied des II. Faktors;

der zweite Teil besteht aus dem Produkt des I. Faktors und dem zweiten Glied des II. Faktors; den dritten Teil endlich bildet das Produkt aus dem I. Faktor und dem dritten Glied des II. Faktors. Subtrahiert man daher nach einander von dem obigen Produkt die soeben genannten drei Produkte, so muß man als Rest 0 erhalten. — Das erste Glied des II. Faktors, den wir uns nun als unbekannt denken wollen, wird gefunden, indem man mit dem ersten Glied des I. Faktors in das erste Glied des obigen Produkts dividiert. Subtrahiert man nun das Produkt aus dem I. Faktor und dem ersten Glied des gefundenen Quotienten (des II. Faktors), nämlich $-18aa + 27ab - 33ac$ von dem gesamten Produkt, so resultiert als Rest $24ab - 30ac - 36bb + 89bc - 55cc$. Sofort ist ersichtlich, daß man das zweite Glied des zu suchenden Quotienten (des II. Faktors) erhält, wenn man mit dem ersten Glied des I. Faktors in das erste Glied des Restes dividiert. Wird hierauf das Produkt aus dem I. Faktor und dem zweiten Glied des Quotienten (des II. Faktors) von dem durch die erste Subtraktion erhaltenen Rest subtrahiert, so bleibt $-30ac + 45bc - 55cc$ übrig. Aus dem ersten Glied dieses Restes erhält man endlich das dritte Glied des Quotienten (des II. Faktors), indem man dasselbe durch das erste Glied des I Faktors dividiert. Das Produkt aus dem so erhaltenen Glied und dem I. Faktor tilgt nunmehr den noch vorhandenen Rest des obigen Produkts. — Diese Darlegung zeigt deutlich das Verfahren, welches bei der Division eines Polynoms durch ein anderes Polynom einzuschlagen ist. Bevor wir dasselbe bestimmt formulieren, wollen wir die vorhin angedeuteten Operationen übersichtlich anordnen:

Dividend Divisor Quotient

$(-18aa+51ab-63ac-36bb+89bc-55cc):(-6a+9b-11c) = 3a-4b+5c$

$-18aa+27ab-33ac$

$(+) \quad (-) \quad (+)$ *)

$24ab-30ac-36bb+89bc$

$24ab \qquad -36bb+44bc$

$(-) \qquad (+) \quad (-)$

$-30ac+45bc-55cc$

$-30ac+45bc-55cc$

$(+) \quad (-) \quad (+)$

0

*) Subtrahieren heißt, das Entgegengesetzte des Subtrahendus zum Minuendus addieren.

Das hier eingeschlagene Verfahren läßt sich folgendermaßen allgemein ausdrücken:

Polynome werden durch einander dividiert, indem man das erste Glied des Dividendus durch das erste Glied des Divisors dividiert, den erhaltenen Quotienten mit dem ganzen Divisor multipliciert und das Produkt subtrahiert, hierauf zu dem Rest das nächste Glied oder alle Glieder heruntersetzt und wieder das erste Glied desselben durch das erste Glied des Divisors dividiert u. s. f. Wird endlich, wenn dies Verfahren fortgesetzt wird, der Rest gleich Null, so geht die Division auf.

Bei der Division zweier Polynome durch einander muß jedoch eine wesentliche Vorbedingung erfüllt sein; es müssen nämlich die Glieder beider in einer bestimmten Ordnung auf einander folgen, wenn die Division derselben, falls sie aufgehen kann, auch wirklich aufgehen soll. Diese Ordnung besteht darin, daß man die Glieder beider Polynome nach der Faktorenanzahl eines in beiden vorkommenden gemeinschaftlichen Buchstabens, entweder in absteigender oder aufsteigender Folge, anordnet und diese Ordnung auch in den jedesmaligen Resten befolgt. Die Glieder des Polynoms 10aaab — 7aabb + 18abbb + 24bbbb folgen in absteigender Reihenfolge der Faktorenanzahl des Buchstabens a auf einander. Soll nun dasselbe durch das Polynom — 3abb + 6bbb + 2aab dividirt werden, so hat man dasselbe ebenfalls in absteigender Reihenfolge der Faktorenanzahl des Buchstabens a zu ordnen, nämlich so: 2aab — 3abb + 6bbb. Diesen beiden Polynomen ist aber auch noch der Buchstabe b gemein. Inbezug auf diesen sind sie in aufsteigender Reihenfolge der Faktorenanzahl desselben geordnet. Wollte man die Glieder beider Polynome in absteigender Folge der Faktorenanzahl des Buchstaben b ordnen, so müßte man schreiben (24bbbb + 18abbb — 7aabb + 10aaab) : (6bbb — 3abb + 2aab). In beiden Fällen geht die Division auf. Dasselbe ist jedoch nicht der Fall, wenn man die Glieder beider Polynome anders, etwa wie folgt, anordnete: (— 7aabb + 24bbbb + 10aaab + 18abbb) : (6bbb + 2aab — 3abb). Den Grund hievon, sowie die Notwendigkeit der Ordnung der durch einander zu dividierenden Polynome wird man einsehen, wenn man die Entstehung eines Produkts aus zwei geordneten Faktoren genau beobachtet.

B. Übungsaufgaben.

a) Aufgaben mit Auflösung.

1) $(15abxy) : (-5ab) = -3xy.$

2) $(24ab - 32ac + 40ad) : 8a = 3b - 4c + 5d.$

3) $(6aa + ab + 10ac - 12bb + 15bc) : (2a + 3b) = 3a - 4b + 5c$

$$\begin{array}{l} 6aa + 9ab \\ (-)\ (-) \\ \hline -8ab + 10ac - 12bb \\ -8ab \qquad\quad -12bb \\ (+) \qquad\quad (+) \\ \hline 10ac + 15bc \\ 10ac + 15bc \\ (-) \qquad (-) \\ \hline 0 \end{array}$$

4) $1 : (1 - b) = 1 + b + bb \ldots.$

$$\begin{array}{l} 1 - b \\ (-)\ (+) \\ \hline b \\ b - bb \\ (-)\ (+) \\ \hline bb \\ bb - bbb \\ (-)\ (+) \\ \hline bbb \ldots \end{array}$$

b) Ungelöste Aufgaben.

Man vergleiche: Fuß, Aufgabensammlung §. 4.

II. Gebrochene Zahlen.

§. 15. Die Brüche im allgemeinen.

1) Wie die Subtraktion, so führt auch die Division zu einer Erweiterung der natürlichen Zahlenreihe. Um nämlich in jedem Fall das Resultat einer Division für jeden beliebigen Dividendus und Divisor angeben zu können, muß man zwischen je zwei benachbarte Zahlen der natürlichen Zahlenreihe neue Zahlen einschieben.

Diese neuen Zahlen heißen **Brüche**; im Gegensatz zu ihnen nennt man die ursprünglichen Zahlen **ganze Zahlen**.

2) Ein Bruch entsteht, wenn man die Einheit in eine gewisse Anzahl gleicher Teile teilt und einen oder mehrere solcher Teile zusammen nimmt. Die Zahl eines Bruches, welche angibt, in wie viel Teile die Einheit geteilt ist, heißt der **Nenner**, und diejenige, welche angibt, wie viel solcher Teile vorhanden sind, der **Zähler** des Bruches. Hiernach drückt z. B. der Bruch m : n aus, daß man die Einheit in n gleiche Teile geteilt und m solcher Teile genommen hat (**echte** und **unechte Brüche**, **eigentliche** und **uneigentliche Brüche**, der **reciproke Wert** eines Bruches, **gemischte Zahlen**, **Doppelbrüche**, **gemeine Brüche** und **Dezimalbrüche**).

3) Jeder Quotient ist gleich einem Bruche, dessen Zähler der Dividend und dessen Nenner der Divisor ist; es sind also a : b und $\frac{a}{b}$ identische Ausdrücke.

§. 16. Das Erweitern und Kürzen der Brüche.

A. Erklärungen und Lehrsätze.

1) **Der Wert eines Bruches bleibt unverändert, wenn man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliciert oder durch dieselbe Zahl dividiert.**

Behauptung 1) $\frac{m}{n} = \frac{m \cdot p}{n \cdot p}$; Behauptung 2) $\frac{m}{n} = \frac{m : p}{n : p}$

Beweis zu 1). Beweisen wir die Richtigkeit dieser Behauptung zunächst an einem bestimmten Beispiel. Multipliciert man den Zähler 5 des Bruches $\frac{5}{9}$ mit 4, so entsteht der Bruch $\frac{5 \cdot 4}{9}$. Da $\frac{5 \cdot 4}{9}$ 4 mal so viel 9tel sind als 5 neuntel, so ist der Bruch $\frac{5 \cdot 4}{9}$ vier mal so groß als der Bruch $\frac{5}{9}$. Multipliciert man nun den Nenner 9 des Bruches $\frac{5 \cdot 4}{9}$ mit 4, so entsteht der Bruch $\frac{5 \cdot 4}{9 \cdot 4}$. Dieser Bruch ist, da jetzt die Einheit in 4 mal so viel gleiche Teile geteilt werden soll, 4 mal so klein als der Bruch $\frac{5 \cdot 4}{9}$. Da nun $\frac{5 \cdot 4}{9}$ vier mal so groß als $\frac{5}{9}$ und $\frac{5 \cdot 4}{9 \cdot 4}$ wieder 4 mal so klein als $\frac{5 \cdot 4}{9}$ ist, so ist $\frac{5}{9} = \frac{5 \cdot 4}{9 \cdot 4}$. Da das Nämliche für jedes andere Beispiel erwiesen werden kann, so kann man ganz allgemein setzen $\frac{m}{n} = \frac{m \cdot p}{m \cdot p}$ — Allgemein geführt, heißt der Beweis: Multipliciert man den Zähler m des Bruches $\frac{m}{n}$ mit p, so ent-

steht der Bruch $\frac{m.p}{n}$. Da mp ntel p mal so viel ntel sind, als m ntel, so ist der Bruch $\frac{mp}{n}$ p mal so groß als der Bruch $\frac{m}{n}$. Multipliciert man nun den Nenner n des Bruches $\frac{mp}{n}$ auch mit p, so wird dieser Bruch, da jetzt die Einheit in p mal so viel gleiche Teile geteilt werden soll, wieder p mal so klein. Es ist also $\frac{m}{n} = \frac{m.p}{n.p}$, w. z. b. w. — Durch ähnliche Schlüsse ergibt sich auch die Richtigkeit der 2. Behauptung.

2) Der vorstehende Satz gibt uns einerseits das Mittel an die Hand, einen Bruch in einen andern von gegebenem Nenner zu verwandeln, andererseits dient er auch dazu, einen Bruch in kleineren Zahlen auszudrücken, denselben zu **heben** oder zu **kürzen**. Das Letztere geschieht, indem man Zähler und Nenner durch die gemeinsamen Faktoren derselben dividiert.

B. Übungsaufgaben.

a) Aufgaben mit Auflösung.

1) $$\frac{36(x - y)(z - t)}{48(z + t)(x - y)} = \frac{3(z - t)}{4(z + t)}.$$

Erläuterung Zähler und Nenner enthalten den gemeinschaftlichen Faktor 12 (x - y). Dividiert man beide durch diese Zahl, so erscheint der obige gekürzte Bruch, der denselben Wert hat, wie der gegebene.

2) $$\frac{5x}{3y} + \frac{6y}{5z} + \frac{2z}{x} = \frac{25xxz}{15xyz} + \frac{18xyy}{15xyz} + \frac{30yzz}{15xyz}$$

Erläuterung In dieser Aufgabe sollen die drei ungleichnamigen Brüche gleichnamig gemacht werden. Es ist dies mit Hilfe des Satzes 1) möglich. Zunächst sucht man für die drei Brüche den **Haupt-** oder **Generalnenner**. Derselbe ist hier 15xyz. Nun bringt man die einzelnen Nenner auf diesen Hauptnenner. Gibt man dem ersten Bruch den Nenner 15xyz, so hat man damit seinen Nenner, der ursprünglich 3y ist, mit 5xz multipliciert. Damit nun der Wert dieses Bruches nicht verändert wird, muß man auch den Zähler desselben mit 5xz multiplicieren u. s. w.

b) Ungelöste Aufgaben.

Man vergleiche: Fuß, Aufgabensammlung, §. 5.

§. 17. Addition und Subtraktion von Brüchen.

A. Erklärungen und Lehrsätze.

1) Gleichnamige Brüche werden addiert oder sub-

trahiert, indem man ihre Zähler addiert, bezw. subtrahiert und der erhaltenen Summe den gemeinschaftlichen Nenner als Nenner gibt.

Behauptung. $\frac{a}{n} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n} = \frac{a + b + c}{n}$

Beweis. Der erste Bruch drückt aus, daß man die Einheit in n gleiche Teile geteilt und a solcher Teile genommen hat; der zweite Bruch, daß man b solcher gleiche Teile und der dritte, daß man c derselben genommen hat. Im ganzen sind also a + b + c gleiche Teile vorhanden; jeder ist ein ntel, folglich sind es zusammen (a + b + c) ntel.

2) Sind ungleichnamige Brüche zu addieren, so macht man sie zunächst gleichnamig, was nach Satz 1) des vorigen § geschieht, und verfährt dann wie bei gleichnamigen Brüchen.

B. Übungsaufgaben.

a) Aufgaben mit Auflösung.

1) $\frac{7x-9y}{3x+2y} - \frac{5x-7y}{3x+2y} + \frac{x}{3x+2y} = \frac{7x-9y-5x+7y+x}{3x+2y} = \frac{3x-2y}{3x+2y}$.

Erläuterung. In dieser Aufgabe sollen gleichnamige Brüche addiert, bezw. subtrahiert werden. Dies geschieht, indem man die Zähler addiert, bezw. subtrahiert und den Nenner unter die erhaltene Summe setzt. Statt den Zähler 5x — 7y zu subtrahieren, kann man ihn mit entgegengesetzten Vorzeichen addieren.

2) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} + \frac{g}{h} = \frac{adfh + bcfh + bdeh + bdfg}{bdfh}$.

Erläuterung. Statt die gleichnamig gemachten Brüche einzeln hinzuschreiben, kann man sofort, wie vorstehendes Beispiel zeigt, die Zähler derselben addieren, sodaß man den gleichen Nenner nur einmal zu schreiben nötig hat. — Man vergleiche das Schema der Rechnung bei der Addition ungleichnamiger gemeiner Brüche.

b) Ungelöste Aufgaben.

Man vergleiche: Fuß, Aufgabensammlung, §. 6

§. 18. Multiplikation von Brüchen.

A. Lehrsätze.

1) Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multipliciert, indem man entweder den Zähler mit dieser Zahl multipliciert und den Nenner unverändert läßt, oder

den Nenner durch diese Zahl dividiert, bei unverändertem Zähler.

Behauptung 1) $\frac{a}{n} \cdot m = \frac{a \cdot m}{n}$; Behauptung 2) $\frac{a}{n} \cdot m = \frac{a}{n : m}$

Beweis. Der Zähler eines Bruches bezeichnet die Anzahl der vorhandenen gleichen Teile; multipliciert man nun denselben mit der ganzen Zahl m, so erhält der Bruch m mal so viele Teile, also auch den m fachen Wert z. B. $\frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{8}{3}$. — Der Nenner eines Bruches zeigt an, in wie viel gleiche Teile eine ursprüngliche Einheit geteilt werden soll. Wird nun derselbe durch m dividiert, also m mal so klein gemacht, so soll jene ursprüngliche Einheit in m mal so wenig gleiche Teile geteilt werden. Dadurch wird aber jeder der neuen Teile m mal so groß als der bisherige Teil war. Da aber die Anzahl dieser Einheiten unverändert bleibt, so wird der ganze Wert des Bruches m mal so groß.

Beispiel. $\frac{3}{8} \cdot 4 = \frac{3}{8 : 4} = \frac{3}{2}$.

2) Eine ganze Zahl wird mit einem Bruch multipliciert, wenn man dieselbe mit dem Zähler multipliciert und den Nenner unverändert läßt.

Behauptung. $a \cdot \frac{m}{n} = \frac{am}{n}$

Beweis. Multipliciert man die Zahl a mit dem Zähler m, so entsteht am. Nun hat man aber mit einem n mal zu großen Multiplikator multipliciert, denn m ist n mal so groß als m : n, dadurch hat man auch ein n mal zu großes Produkt erhalten; daher ist am noch durch n zu dividieren. Beispiel $7 \cdot \frac{5}{3} = \frac{35}{3} = 11\frac{2}{3}$.

3) Zwei Brüche werden mit einander multipliciert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliciert und ersteres Produkt durch letzteres dividiert.

Beweis. Ähnlich, wie im vorigen Satz.

B. Übungsaufgaben.

a) Aufgaben mit Auflösung.

1) $\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right)\left(\frac{b}{c} + \frac{d}{a}\right) = \frac{ab}{bc} + \frac{ad}{ab} - \frac{bc}{cd} - \frac{cd}{ad} = \frac{a}{c} + \frac{d}{b} - \frac{b}{d} - \frac{c}{a}$.

Erläuterung. Es wurde jedes Glied des einen Faktors mit jedem Glied

des andern multipliciert nach Satz g) des §. 13. Die erhaltenen Teilprodukte konnten gekürzt werden. Dieselben könnte man nun noch auf den gemeinschaftlichen Nenner abcd bringen. Man hätte auch die Glieder eines jeden Faktors gleichnamig machen und dann erst die Multiplikation ausführen können. Kommen in einer derartigen Aufgabe gemischte Zahlen vor, so werden dieselben erst am zweckmäßigsten eingerichtet, z. B. $\left(a + \frac{b}{n}\right)\left(c + \frac{d}{m}\right) = \frac{an+b}{n} \cdot \frac{cm+d}{m}$ $= \frac{(an + b)(cm + d)}{mn}$. Man vergleiche Beispiele folgender Art $8\frac{2}{3} \cdot 12\frac{3}{4}$ $= \frac{26}{3} \cdot \frac{51}{4}$.

b) Ungelöste Aufgaben.

S. Fuß, Sammlung von Aufgaben, §. 7.

§. 19. Division von Brüchen.

A Lehrsätze.

1) Ein Bruch wird durch eine Zahl dividiert, indem man entweder den Zähler dividiert, bei unverändertem Nenner, oder den Nenner multipliciert, bei unverändertem Zähler.

Behauptung. $\frac{a}{n} : m = \frac{a : m}{n}$ oder $\frac{a}{n \cdot m}$

Beweis. Dividiert man den Zähler a des Bruches a : n durch m, so bekommt der Bruch m mal so wenig Teile, somit einen m mal so kleinen Wert; z. B. $\frac{12}{7} : 4 = \frac{12 : 4}{7} = \frac{3}{7}$. Multipliciert man dagegen den Nenner mit m, so werden aus der Einheit m mal so viel, damit aber m mal so kleine Teile; hiedurch erhält aber der Bruch ebenfalls einen m mal so kleinen Wert, z. B. $\frac{3}{7} : 4 = \frac{3}{7 \cdot 4} = \frac{3}{28}$.

2) Eine ganze Zahl wird durch einen Bruch dividiert, indem man die Zahl mit dem reciproken Wert des Bruches multipliciert.

Behauptung. $m : \frac{a}{n} = m \cdot \frac{n}{a}$

Beweis. Dividiert man m durch den Zähler a, so erhält man m : a. Da man nun durch einen n mal zu großen Divisor dividiert hat, so muß das Resultat n mal zu klein sein; daher muß m : a noch mit n multipliciert werden, z. B. $6 : \frac{5}{8} = 6 \cdot \frac{8}{5} = 9\frac{3}{5}$.

3) Ein Bruch wird durch einen Bruch dividiert, in-

dem man jenen mit dem reciproken Wert von diesem multipliciert.

Behauptung. $\frac{m}{n} : \frac{r}{s} = \frac{m}{n} \cdot \frac{s}{r}$

Beweis. Dividiert man m : n durch r, so erhält man nach dem ersten Satz m : (n · r). Da man nun durch einen s mal zu großen Divisor dividiert hat, weshalb das Resultat m : (n · r) s mal zu klein ist, so muß man dasselbe noch mit s multiplicieren. Es ergibt sich also $\frac{m}{n \cdot r} \cdot s = \frac{m \cdot s}{n \cdot r} = \frac{m}{n} \cdot \frac{s}{r}$; z. B. $\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{9}$.

4) Aus den Sätzen 1, 2 und 3 folgt, daß die Division immer in eine Multiplikation verwandelt werden kann; der Dividend ist der eine und der reciproke Wert des Divisors der andere Faktor. Dies läßt sich auch so aussprechen: Dividieren heißt, mit dem reciproken Wert des Divisors multiplicieren. Hiernach ist $\frac{a}{n} : m = \frac{a}{n} : \frac{m}{1} = \frac{a}{n} \cdot \frac{1}{m} = \frac{a}{n \cdot m}$.

B. Übungsaufgaben.

a) Aufgaben mit Auflösung.

1) $\left(\frac{a}{c} + \frac{bg}{2d} - 4ad - 5\right) : \frac{2c}{d} = \frac{a}{c} \cdot \frac{d}{2c} + \frac{bg}{2d} \cdot \frac{d}{2c} - 4ad \cdot \frac{d}{2c} - 5 \cdot \frac{d}{2c} = \frac{ad}{2c^2} + \frac{bg}{4c} - \frac{2ad^2}{c} - \frac{5d}{2c}$.

Erläuterung. Man vergleiche Satz g) in §. 14, ferner Satz 4) in §. 19 und endlich Satz 1) in §. 16.

2) $\left(\frac{3a^2}{20} + \frac{7ab}{30} + ac - \frac{8b^2}{9} + \frac{10bc}{3}\right) : \left(\frac{3a}{4} - \frac{4b}{3} + 5c\right) = \frac{a}{5} + \frac{2b}{3}$

$\frac{3a^2}{20} - \frac{4ab}{15} + ac$

$(-) \quad (+) \quad (-)$

$\frac{ab}{2} - \frac{8b^2}{9} + \frac{10bc}{3}$

$\frac{ab}{2} - \frac{8b^2}{9} + \frac{10bc}{3}$

$(-) \quad (+) \quad (-)$

0

Erläuterung. Man vergleiche Satz h) in §. 14 und Satz 4) in §. 19. Um $\frac{4}{15}ab$ und $\frac{7}{30}ab$ addieren zu können, verwandelt man die $\frac{4}{15}ab$ in $\frac{8}{30}ab$.

3) $[(156-6.-3-(21-30:2)):21-3(4-84:(7-28)-1)+19]:6+11$

D. sch. r. Kl. gel.: $[(156-6.-3-6):21-3(4-84:-21-1)+19]:6+11$

Die st. r. Kl. aufg.: $[168:21-3.7+19]:6+11$

Die eck. Kl. aufgelöst: $6:6+11$

Zusammengefaßt: $12.$

4) $$\frac{84a\,(m+n)}{xy} : 12(m+n) =$$

$$\frac{84a(m+n)}{xy} \cdot \frac{1}{12(m+n)} =$$

$$\frac{7a}{xy}$$

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabensammlung § 8 und 9; ferner können aufgelöst werden die Gleichungen unter Ic und d) in §. 31, sowie schwierigere Aufgaben in §. 32. Macht man an dieser Stelle die Schüler kurz mit der Verwandlung von Aggregaten in Produkte und mit der Auflösung von Gleichungen mit zwei Unbekannten bekannt, so kann man dann auch noch die meisten Gleichungen unter II a) b) c) und d) in § 31, unter I a) und b) in §. 33, sowie leichtere Aufgaben in §. 34 auflösen lassen. — Man vergleiche Fußnote auf Seite 22

Zweiter Abschnitt.

Von den Potenzen.

§. 20. Die Potenzen im allgemeinen.

A. Erklärungen

Das Produkt 5 . 5, das aus zwei gleichen Faktoren besteht, kann auch so geschrieben werden, daß man den gleichen Faktor 5 nur einmal setzt, und außerdem durch eine rechts oben angefügte 2 andeutet, daß er zweimal zu nehmen ist, also: 5^2 (zu lesen: 5 hoch 2). Ebenso kann man statt $5 . 5 . 5 = 5^3$, statt $5 . 5 . 5 . 5 = 5^4$, statt $a . a . a . a . a = a^5$ schreiben (zu lesen: a hoch 5 oder a in der fünften (Potenz) oder die fünfte Potenz von a). Hiernach bedeutet also 6^3 so viel als $6 . 6 . 6$, $8^4 = 8 . 8 . 8 . 8$, $b^5 = b . b . b . b . b$ und der Ausdruck a^n steht für ein Produkt von n gleichen Faktoren, deren jeder a ist. Einen Ausdruck von der Form a^n nennt man eine Potenz und liest ihn: a hoch n oder a in der nten (Potenz) oder die nte Potenz von a. Unter einer Potenz versteht man demnach ein Produkt, das aus zwei oder mehreren gleichen Faktoren besteht. Der zwei oder mehreremal zu wiederholende Faktor heißt Grundzahl, Basis oder Dignand und die rechts oben beigefügte Zahl, welche angibt, wie viel mal die Basis als Faktor zu nehmen ist, der Exponent der Potenz. Eine Zahl potenzieren, sie in eine Potenz erheben, heißt, sie so oft mal als Faktor setzen, als der Exponent Einheiten hat. Wird eine Zahl zweimal als Faktor gesetzt, so sagt man, sie werde ins Quadrat erhoben, sie werde quadriert, also 2^2, a^2 (zu lesen: a im Quadrat, oder a Quadrat). Eine Zahl kubieren, sie in den Kubus erheben, heißt sie 3mal als Faktor setzen, also 2^3, a^3 (zu lesen: a im Kubus oder a Kubus). Setzt man eine Zahl 4mal als Faktor, so erhebt man sie damit ins Biquadrat, also 2^4, a^4 (zu lesen: a im Biquadrat). Die zweite, dritte

und vierte Potenz einer Zahl heißt also bezüglich Quadrat, Kubus, Biquadrat.*)

Aus dem vorhin aufgestellten Begriff der Potenzierung ergeben sich die nachstehenden zwei Folgerungen: Der Exponent kann nur eine positive ganze Zahl sein und: Die Basis und der Exponent dürfen nicht vertauscht werden. Was jedoch die erstere Folgerung betrifft, so wird später gezeigt werden, daß ein Potenz auch dann einen Sinn hat, wenn der Exponent eine negative oder gebrochene Zahl ist.

B. **Übungsaufgaben.**

Man vergleiche: Fuß Aufgabensammlung §. 10.

I. Potenzen mit positiven ganzen Exponenten.

§. 21. Addition und Subtraktion von Potenzen.

A. Erklärungen und Lehrsätze.

a) Verschiedenheit der Potenzen inbezug auf Basis und Exponent.

In dieser Beziehung unterscheidet man gleiche, gleichbasige, gleichnamige und ungleiche Potenzen. Gleiche Potenzen sind solche, bei denen sowohl die Basen als auch die Exponenten unter einander gleich sind, z. B. $6a^4$ und $9a^4$. Potenzen, die nur einerlei Grundzahlen haben, heißen gleichbasig, z. B. $6a^4$ und $9a^5$. Gleichnamig nennt man Potenzen, die nur einerlei Exponenten haben, z. B. $6a^4$ und $9b^4$. Ungleiche Potenzen endlich sind solche, die sowohl in den Grundzahlen als in den Exponenten verschieden sind, z. B. $11c^4$ und $14d^6$.

b) Gesetz der Addition und Subtraktion der Potenzen.

Nur gleiche Potenzen kann man addieren und subtrahieren; die Addition und Subtraktion gleichbasiger gleichnamiger und ungleicher Potenzen kann nur angedeutet werden. Sind gleiche Potenzen zu addieren

---

*) Die zweite Potenz einer Zahl a nennt man deshalb das Quadrat der Zahl a, weil dieselbe den Inhalt eines Quadrats darstellt, dessen Seite die Maßzahl a enthält. — Da die dritte Potenz einer Zahl a den Kubikinhalt eines Würfels (Kubus) darstellt, dessen Kante a Längeneinheiten mißt, so nennt man aus diesem Grunde die dritte Potenz einer Zahl den Kubus derselben. — Das Wort Biquadrat bezeichnet: das Quadrat des Quadrats.

oder zu subtrahieren, so addiert, bezw. subtrahiert man die Koefficienten und fügt das erhaltene Resultat als Koefficient der gemeinschaftlichen Potenz bei.

Beweis. Die Richtigkeit der vorstehenden Sätze folgt unmittelbar aus dem unter e) und f) des §. 11 Gesagten. Hiernach ist also $2a^3 + 3a^3 = a^3 + a^3 + a^3 + a^3 + a^3 = 5a^3$.

c) Ordnung der Glieder eines Polynoms.

Kommen in den Gliedern eines Polynoms Potenzen vor, und werden die Exponenten derjenigen Potenzen, welche einen gewissen Buchstaben als Basis haben, größer, so sagt man, das Polynom sei nach steigenden Potenzen dieses Buchstabens geordnet. Hiernach ist das Polynom $a^2 + 3a^3 - 6a^4 + 9a^5$ nach steigenden Potenzen der Basis a geordnet. Von dem Polynom $5a^4 - 3a^3 + 6a^2 - a$ sagt man, es sei nach fallenden Potenzen der Basis a geordnet. Das Polynom: $3ab^5 - 4a^2b^4 + 6a^3b^3 - 7a^4b^2 + 9a^5b$ ist nach steigenden Potenzen von a und gleichzeitig nach fallenden Potenzen von b geordnet.

B. Übungsaufgaben.

a) Aufgaben mit Auflösung.

1) $(9a^4 - 7a^3b + 15a^2b^2) + (6\frac{2}{3}a^4 - 3a^3b + 5a^2b^2 + 6ab^3) + (9\frac{2}{5}a^3b + 10a^2b^2 + ab^3) = ?$

$$\begin{array}{r} 9a^4 - 7a^3b + 15a^2b^2 \qquad\qquad \\ 6\frac{2}{3}a^4 - 3a^3b + 5a^2b^2 + 6ab^3 \\ + 9\frac{2}{5}a^3b + 10a^2b^2 + ab^3 \\ \hline 15\frac{2}{3}a^4 - \frac{3}{5}a^3b + 30a^2b^2 + 7ab^3. \end{array}$$

2) $7a^4 - [11a^6 - (5a^4 - [6a^9 - (23a^6 - 4a^9) + 12a^4] - 13a^6) + 17a^9] =$
$7a^4 - [11a^6 - (5a^4 - [6a^9 - 23a^6 + 4a^9 + 12a^4] - 13a^6) + 17a^9] =$
$7a^4 - [11a^6 - (5a^4 - 6a^9 + 23a^6 - 4a^9 - 12a^4 - 13a^6) + 17a^9] =$
$7a^4 - [11a^6 - 5a^4 + 6a^9 - 23a^6 + 4a^9 + 12a^4 + 13a^6 + 17a^9] =$
$7a^4 - 11a^6 + 5a^4 - 6a^9 + 23a^6 - 4a^9 - 12a^4 - 13a^6 - 17a^9 =$
$- a^6 - 27a^9.$

oder kürzer, indem man sämtliche Klammern auf einmal löst:

$7a^4 - 11a^6 + 5a^4 - 6a^9 + 23a^6 - 4a^9 - 12a^4 - 13a^6 - 17a^9 =$
$- a^6 - 27a^9.$

b) Ungelöste Aufgaben.

S. Fuß. Aufgabensammlung §. 11.

§. 22. Multiplikation von Potenzen.

A. Erklärungen und Lehrsätze.

a) Multiplikation gleichbasiger Potenzen.

1) Potenzen von gleichen Basen werden mit einander multipliciert, indem man die gemeinschaftliche Basis mit der Summe der Exponenten potenziert.

Behauptung. $a^2 \cdot a^3 = a^{2+3} = a^5$. Allgemein: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.*)

Beweis. Es ist $a^2 \cdot a^3 = aa \cdot aaa = aaaaa = a^5$. — Allgemein: Dem Begriff der Potenz gemäß bedeutet $a^m \cdot a^n = a \cdot a \cdot a \cdots$ m mal $\times$ $a \cdot a \cdot a \cdots$ n mal. Es sind nun zwei Produkte mit einander zu multiplicieren. Dies geschieht, indem man die Faktoren des einen Produkts als Faktoren zu denen des andern Produkts hinzuschreibt. Thut man dies, so erhält man ein Produkt, in dem der Faktor a zunächst m mal und dann noch n mal, also überhaupt $m + n$ mal enthalten ist. Dafür schreiben wir a^{m+n}. Es ist also $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, w. z. b. w. — Beispiel. $2^2 \cdot 2^3 = 2^5 = 32$ ($2^2 = 4$; $2^3 = 8$; $4 \cdot 8 = 32$).

2) Eine Zahl wird mit einer Summe potenziert, indem man die Zahl mit jedem einzelnen Summanden potenziert und die erhaltenen Potenzen mit einander multipliciert.

Umkehrung von Satz 1): $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$. — Beispiel. $2^{2+3} = 2^2 \cdot 2^3 = 4 \cdot 8 = 32$ ($2^5 = 32$).

b) Multiplikation gleichnamiger Potenzen.

1) Potenzen von gleichen Exponenten werden mit einander multipliciert, indem man das Produkt der Basen zur gemeinschaftlichen Potenz erhebt.

Behauptung. $a^2 \cdot b^2 = (ab)^2$. Allgemein: $a^m \cdot b^m = (ab)^m$.

Beweis. Es ist $a^2 \cdot b^2 = aa \cdot bb = abab = (ab)^2$. Allgemein: $a^m = a \cdot a \cdot a \cdots$ m mal; $b^m = b \cdot b \cdot b \cdots$ m mal; beide Gleichungen mit einander multipliciert: $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)$

---

*) lies: a zur m + nten.

$\cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdots$ m mal $= (a \cdot b)^m$. — Beispiel. $2^4 \cdot 5^4 = 10^4 = 10000$.

2) Ein Produkt wird mit einer Zahl potenziert, indem man jeden einzelnen Faktor mit der Zahl potenziert und die erhaltenen Potenzen mit einander multipliciert.

Umkehrung von Satz 1). $(ab)^m = a^m \cdot b^m$. Unabhängig von demselben läßt sich dieser Satz in folgender Art beweisen: $(abc)^3 = abc \cdot abc \cdot abc = aaa \cdot bbb \cdot ccc = a^3 \cdot b^3 \cdot c^3$. Allgemein: $(ab)^m = (ab) \cdot (ab) \cdot (ab) \cdots$ m mal $= a \cdot a \cdot a \cdots$ m mal $\times b \cdot b \cdot b \cdots$ m mal $= a^m \cdot b^m$. — Beispiel. $(2 \cdot 5)^3 = 2^3 \cdot 5^3 = 8 \cdot 125 = 1000$.

c) Multiplikation ungleicher Potenzen.

Haben die mit einander zu multiplicierenden Potenzen ungleiche Basen und ungleiche Exponenten, so kann die Multiplikation nur angedeutet werden, z. B. $a^2 \cdot b^3$.

d) Multiplikation von Polynomen, deren Glieder Potenzen enthalten.

Ist ein Polynom, dessen Glieder Potenzen enthalten, mit einem Monom oder mit einem andern Polynom zu multiplicieren, so hat man hiebei die in Satz f) und g) des §. 13 enthaltenen Gesetze unter Berücksichtigung der vorstehenden Sätze zu befolgen.

B. Übungsaufgaben.

a) Aufgaben mit Auflösung.

1) $8a^3 \cdot 5a^4 \cdot 6a = 240a^{3+4+1} = 240a^8$.

Erläuterung: $6a = 6a^1$; daher die Summe der Exponenten: $3 + 4 + 1$.

2) $$\frac{3(a+b)^m c^n}{5(g+h)^r} \cdot \frac{7(a+b)^q c^g}{4(g+h)^s} = \frac{21(a+b)^{m+q} c^{g+n}}{20(g+h)^{r+s}}$$

Erläuterung. $(a+b)^m \cdot (a+b)^q = (a+b)^{m+q}$; denn diese beiden Potenzen haben gleiche Basen, nämlich $(a+b)$; die Exponenten müssen also addiert werden.

$$3)\left(\frac{4a^2}{5} - \frac{5a^2b}{6} + \frac{4ab^2}{2} - \frac{3b^3}{8}\right) \cdot \left(\frac{3a^2b^3}{4} - \frac{2ab^4}{3}\right) = ?$$

$$\frac{3a^5b^3}{5} - \frac{5a^4b^4}{8} + \frac{9a^3b^5}{8} - \frac{9a^2b^6}{32}$$

$$- \frac{8a^4b^4}{15} + \frac{5a^3b^5}{9} - a^2b^6 + \frac{ab^7}{4}$$

$$\frac{3a^5b^3}{5} - \frac{139a^4b^4}{120} + \frac{121a^3b^5}{72} - \frac{41a^2b^6}{32} + \frac{ab^7}{4}$$

b) Ungelöste Aufgaben.

Man vergleiche: Fuß, Aufgabensammlung, §. 12.

§. 23. Division von Potenzen.

A. Erklärungen und Lehrsätze.

a) Division gleichbasiger Potenzen.

1) Zwei Potenzen von gleichen Basen werden durch einander dividiert, indem man den Potenzexponenten des Divisors von dem des Dividendus subtrahiert und die gemeinschaftliche Basis mit dieser Differenz potenziert.

Behauptung. $a^4 : a^2 = a^2$. Allgemein: $a^m : a^n = a^{m-n}$.*)

Beweis. $a^4 : a^2 = aaaa : aa = aa = a^2$. Allgemein: Dem Begriff der Potenz gemäß ist $a^m : a^n = a \, . \, a \, . \, a \, . \, . \, . \, . \, m$ mal : $a \, . \, a \, . \, a \, . \, . \, . \, n$ mal. Es sind nun zwei Produkte durch einander zu dividieren. Dies geschieht, indem man je einen Faktor des einen Produkts durch je einen Faktor des andern Produkts dividiert Führt man hier die Division aus, so werden dadurch so viel von den Faktoren des Dividendus in 1 verwandelt oder aufgehoben, als Faktoren im Divisor sind. Im Dividend bleiben daher nur $m - n$ Faktoren a übrig. Hiefür wird geschrieben a^{m-n}. Es ist also $a^m : a^n = a^{m-n}$. — Beispiel. $2^5 : 2^2 = 2^{5-2} = 2^3 = 8$.

2) Eine Zahl wird mit einer Differenz potenziert, indem man diese Zahl mit dem Minuend und Subtrahend potenziert und erstere Potenz durch die letztere dividiert.

*) Es wird hier vorausgesetzt, daß $m > n$; lies: a zur $m - n$ten.

Umkehrung von Satz 1): $a^{m-n} = a^m : a^n$.

b) Division gleichnamiger Potenzen.

1) Zwei Potenzen von gleichen Exponenten werden durch einander dividiert, indem man den Quotienten der Basen zur gemeinschaftlichen Potenz erhebt.

Behauptung. $a^4 : b^4 = (a : b)^4$. Allgemein: $a^m : b^m = (a : b)^m$

Beweis. Es ist $\frac{a^4}{b^4} = \frac{aaaa}{bbbb} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^4$.

Allgemein: $\frac{a^m}{b^m} = \frac{a \,.\, a \,.\, a \ldots m \text{ mal}}{b \,.\, b \,.\, b \ldots m \text{ mal}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \ldots m \text{ mal}$ $= \left(\frac{a}{b}\right)^m$. — Beispiel. $\frac{8^3}{2^3} = \left(\frac{8}{2}\right)^3 = 4^3 = 64$.

2) Ein Quotient wird mit einer Zahl potenziert, indem man Dividend und Divisor mit dieser Zahl potenziert und erstere Potenz durch die letztere dividiert.

Umkehrung von Satz 1). Unabhängig von diesem läßt er sich in folgender Art beweisen. Es ist

$\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{aaaa}{bbbb} = \frac{a^4}{b^4}$. Allgemein:

$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \ldots m \text{ mal} = \frac{a \,.\, a \,.\, a \ldots m \text{ mal}}{b \,.\, b \,.\, b \ldots m \text{ mal}} = \frac{a^m}{b^m}$. —

Beispiel. $\left(\frac{8}{2}\right)^3 = \frac{8^3}{2^3} = \frac{512}{8} = 64 \; (= 4^3)$.

c) Division ungleicher Potenzen.

Sind die zur Division vorgelegten Potenzen in Basis und Exponent verschieden, so kann die Division nur angedeutet, nicht ausgeführt werden, z. B. $a^4 : b^3$.

d) Division eines aus Potenzen bestehenden Polynoms durch ein Monom oder ein Polynom.

Es gelten hierüber die in §. 14 entwickelten Gesetze.

B. **Übungsaufgaben.**

a) Aufgaben mit Auflösung.

1) $(24a^6b^7c^8d^3) : (8a^4b^6c^4d^2) = 3a^2bc^4d$.

2) $18(x^2 - y^3)^7 : 3(x^2 - y^3)^4 = 6(x^2 - y^3)^{7-4} = 6(x^2 - y^3)^3$.

3) $(10a^8b^6 - 7a^7b^5 + 9a^6b^4c^{10}) : 2a^5b^2 = 5a^3b^4 - \frac{7}{2}a^2b^3 + \frac{9}{2}ab^2c^{10}$.

4) $(15a^6 - 46a^4 + 69a^2 - 30) : (3a^2 - 2) = 5a^4 - 12a^2 + 15$

$$15a^6 - 10a^4$$
$$(-) \quad (+)$$
$$- 36a^4 + 69a^2$$
$$- 36a^4 + 24a^2$$
$$(+) \quad (-)$$
$$45a^2 - 30$$
$$45a^2 - 30$$
$$(-) \quad (+)$$
$$0$$

$$= \frac{3a^2b^3}{4} - \frac{2ab^4}{3}$$

5) $\left(\frac{3a^5b^3}{5} - \frac{139a^4b^4}{120} + \frac{121a^3b^5}{72} - \frac{41a^3b^6}{32} + \frac{ab^7}{4}\right) : \left(\frac{4a^3}{5} - \frac{5a^2b}{6} + \frac{3ab^2}{2} - \frac{3b^3}{8}\right)$

$$\frac{3a^5b^4}{5} - \frac{15a^4b^4}{24} + \frac{9a^3b^5}{8} - \frac{9a^2b^6}{32}$$
$$(-) \quad (+) \quad (-) \quad (+)$$
$$- \frac{8a^4b^4}{15} + \frac{5a^3b^5}{9} - a^2b^6 + \frac{ab^7}{4}$$
$$- \frac{8a^4b^4}{15} - \frac{5a^3b^5}{9} - a^2b^6 + \frac{ab^7}{4}$$
$$(+) \quad (-) \quad (+) \quad (-)$$
$$0$$

b) Ungelöste Aufgaben.

Man vergleiche: Fuß, Aufgabensammlung §. 13.

II. Potenzen mit negativen ganzen Exponenten.

§. 24. Entstehung und Begriff derselben.

1) Nach §. 23 Satz a) ist $a^m : a^n = a^{m-n}$. Inbezug auf die besondern Werte der Differenz $m - n$ sind drei Fälle denkbar: es kann nämlich $m > n$, oder $m = n$ oder $m < n$ sein.

2) Ist $m > n$, so muß die Differenz $m - n$ eine positive Zahl sein. In diesem Fall stellt also a^{m-n} eine Potenz mit positivem Exponenten vor. Nur von Potenzen dieser Art war either die Rede.

3) Wenn m = n ist, so wird nach §. 14 der Ausdruck $a^m : a^n = 1$; denn jede Zahl durch sich selbst dividiert gibt 1 zum Quotienten. Nun ist aber nach Satz a) in §. 23 auch $a^m : a^n = a^{m-n} = a^o$. Hieraus schließen wir: Jede Potenz, deren Exponent Null ist, ist gleich Eins.

4) Ist $m < n$, so muß a^{m-n} eine Potenz mit negativem Exponenten vorstellen. Die Bedeutung einer solchen Potenz soll zunächst an einem bestimmten Beispiel gezeigt werden. In dem Beispiel $2^4 : 2^7$ ist 4 um 3 kleiner als 7, mithin ist $7 = 4 + 3$ und $3 = 7 - 4$. Soll nun 2^4 durch 2^7 dividiert werden, so kann man alle Faktoren des Zählers 2^4 gegen den Nenner 2^7 heben; für den letzteren bleiben dann noch $3 = 7 - 4$ Faktoren übrig und der Zähler wird gleich 1. Man erhält mithin als Resultat dieser Division einen Bruch, der zum Zähler 1 und zum Nenner die Anzahl der Faktoren hat, um welche der Divisor größer als der Dividend ist. Es ist also, um das eben Entwickelte kürzer darzustellen:

$$\frac{2^4}{2^7} = \frac{2^4}{2^{4+3}} = \frac{2^4}{2^4 \cdot 2^3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2^{7-4}}.$$

Wenden wir nun auf dieses Beispiel das in §. 23 Satz a) entwickelte Gesetz an, so erhält man für $2^4 : 2^7 = 2^{4-7} = 2^{-3}$. — Nunmehr wird auch die folgende allgemeine Entwicklung verständlicher sein. Es sei in der Aufgabe $a^m : a^n$ der Exponent m um y kleiner als n, mithin $n = m + y$ und $y = n - m$. Alsdann ist, gerade so wie in dem vorigen bestimmten Beispiel, einerseits:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^{m+y}} = \frac{a^m}{a^m \cdot a^y} = \frac{1}{a^y} = \frac{1}{a^{n-m}}$$ und andererseits $a^m : a^n = a^{m-n} = a^{-(n-m)} = a^{-y}$.

Vergleicht man die beiden Resultate $1 : a^y$ und a^{-y} der Aufgabe $a^m : a^n$, sowie die beiden Resultate $1 : 2^3$ und 2^{-3} der Aufgabe $2^4 : 2^7$ mit einander, so gelangen wir hiedurch zu folgendem Schluß:

Eine Potenz mit negativem Exponenten ist gleich einem Quotienten, der zum Dividendus 1 und zum Divisor die Potenz mit positivem Exponenten hat.

Unabhängig von vorstehender Entwicklung lassen sich die zwei Sätze $a^o = 1$ und $a^{-n} = 1 : a^n$ auch wie folgt beweisen: 1) $a^o = a^{p-p} = a^p : a^p = 1$ (Vergleiche §. 23, a, 2 und §. 14). — 2) $a^{-n} = a^{o-n} = a^o : a^n = 1 : a^n$.

§. 25. Verwandlung von Potenzen mit negativen Exponenten in solche mit positiven Exponenten und umgekehrt.

1) Nach dem vorigen § ist $a^{-n} = 1 : a^n$. Es ist aber auch $1 : a^{-n} = a^n$; denn:

$$\frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{a^{o-n}} = \frac{1}{\frac{a^o}{a^n}} = \frac{1}{\frac{1}{a^n}} = a^n.$$ Daraus folgt:

Eine Potenz mit negativem Exponenten kann in eine Potenz mit positivem Exponenten verwandelt werden; steht dieselbe nämlich in dem Zähler eines Bruches, so kann man sie in den Nenner desselben mit positivem Exponenten setzen und steht sie im Nenner, so kann man sie in den Zähler mit positivem Exponenten bringen.

Hiernach ist: $\frac{3a^{-4}b^5}{4c^{-6}d^3} = \frac{3b^5c^6}{4a^4d^3}$.

2) Mit Hilfe des vorstehenden Satzes kann die Bruchform bei Potenzen ganz vermieden werden, z. B. $a^2 : b^3 = a^2b^{-3}$.

§. 26. Das Rechnen mit Potenzen, deren Exponenten negativ sind.

A. Lehrsätze.

Alle in den Paragraphen 22 und 23 abgeleiteten Gesetze des Potenzierens der verschiedenen Zahlformen sowie des Rechnens mit Potenzen gelten auch dann, wenn die Exponenten der betreffenden Potenzen negative ganze Zahlen sind.

Behauptung 1). $a^m . a^{-n} = a^{m-n}$

Beweis. $a^m . a^{-n} = a^m . \frac{1}{a^n} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = a^{m+(-n)}$

Behauptung 2). $a^{-m} . a^n = a^{-m+n}$

Beweis. $a^{-m} . a^n = \frac{1}{a^m} . a^n = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = a^{-m+n}$

Behauptung 3). $a^{-m} . a^{-n} = a^{(-m)+(-n)}$

Beweis. $a^{-m} . a^{-n} = \frac{1}{a^m} . \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)} = a^{(-m)+(-n)}$

Behauptung 4). $a^m : a^{-n} = a^{m+n}$

Beweis $a^m : a^{-n} = a^m : \frac{1}{a^n} = a^m . a^n = a^{m+n} = a^{m-(-n)}$

Behauptung 5). $a^{-m} : a^n = a^{-m-n}$

Beweis. $a^{-m} : a^n = \frac{1}{a^m} : a^n = \frac{1}{a^m a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)}$

Behauptung 6). $a^{-m} : a^{-n} = a^{n-m}$

Beweis. $a^{-m} : a^{-n} = \frac{1}{a^m} : \frac{1}{a^n} = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = a^{-m-(-n)}$

Behauptung 7). $a^{-n} . b^{-n} = (ab)^{-n}$

Beweis. $a^{-n} . b^{-n} = \frac{1}{a^n} . \frac{1}{b^n} = \frac{1}{(ab)^n} = (ab)^{-n}$

Behauptung 8). $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}}$

Beweis $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{b^n}{a^n} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}}$

B. **Übungsaufgaben.**

a) Aufgaben mit Auflösung.

1) $\frac{3a^4b^5}{5c} \cdot \frac{2a^{-5}b^{-6}}{4c^{-4}} = \frac{6a^{-1}b^{-1}}{20c^{-3}} = \frac{3c^3}{10ab}$.

2) $(a + b)^{-4}x^3y^4 . (a + b)^7x^{-5}y^{-5} = \frac{(a + b)^3}{x^2y}$.

3) $\frac{2(x + y)^{-5}z^{-3}}{5u^9t^{-3}} : \frac{4u^{-8}z^{-7}}{5(x + y)^3t^{-2}} = \frac{2(x + y)^{-5}z^{-3}}{5u^9t^{-3}}$.

$\frac{5(x + y)^3t^{-2}}{4u^{-8}z^{-7}} = \frac{(x + y)^{-2}z^{-3}t^{-2}}{2ut^{-3}z^{-7}} = \frac{tz^4}{2(x + y)^2u}$.

b) Ungelöste Aufgaben.

Man vergleiche Fuß, Aufgabensammlung §. 14 und 15.

III. Potenzen von Potenzen und negativen Zahlen.

§. 27. Potenzierung einfacher Ausdrücke.

A. **Erklärungen und Lehrsätze.**

1) Eine Potenz wird mit einer Zahl potenziert, indem man ihren Exponenten mit der Zahl multipliciert und das erhaltene Produkt der Basis als Exponent gibt.

Behauptung: $(a^3)^4 = a^{3 \cdot 4} = a^{12}$. Allgemein: $(a^m)^n = a^{mn}$.

Beweis. Es ist $(a^3)^4 = a^3 . a^3 . a^3 . a^3 = a^{3+3+3+3} = a^{12} = a^{3 \cdot 4}$. Allgemein: Dem Begriff der Potenz gemäß ist

$(a^m)^n = a^m \,.\, a^m \,.\, a^m \ldots$ n mal als Faktor gesetzt. Da Potenzen von gleichen Basen mit einander multipliciert werden, indem man ihre Exponenten addiert, so ist $a^m \,.\, a^m \,.\, a^m \ldots$ n mal $= a^{m + m + m \ldots n\,\text{mal}} = a^{mn}$. — Der obige Satz gilt auch dann, wenn die Exponenten negativ sind. Es ist also: $(a^m)^{-n} = a^{m \cdot -n}$; denn

$$(a^m)^{-n} = \frac{1}{(a^m)^n} = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn} = a^{m.-n} \text{ und } (a^{-m})^{-n} = a^{mn};$$

$$\text{denn } (a^{-m})^{-n} = \left(\frac{1}{a^m}\right)^{-n} = (a^m)^n = a^{mn} = a^{-m.-n}.$$

2) Bei negativer Basis ist jede gerade Potenz stets positiv, jede ungerade negativ.

Beweis. Derselbe folgt aus den Sätzen über die Multiplikation negativer Zahlen; denn

$(-2)^2 = (-2) \,.\, (-2) = +4$

$(-2)^3 = (-2) \,.\, (-2) \,.\, (-2) = -8$

$(-2)^4 = (-2) \,.\, (-2) \,.\, (-2) \,.\, (-2) = +16$

$(-2)^5 = (-2) \,.\, (-2) \,.\, (-2) \,.\, (-2) . (-2) = -32.$

3) Soll eine negative Zahl potenziert werden, so potenziere man dem vorigen Satz zufolge die absolute Zahl und nehme das Resultat positiv oder negativ, je nachdem der Potenzexponent gerade oder ungerade ist; z. B. $(-a)^{17} = -a^{17}$ und $(-a)^{18} = a^{18}$.

Anmerkung. Dem soeben Gesagten zufolge muß der Ausdruck $-x^2$ wohl von $(-x)^2$ unterschieden werden. Den ersteren lese man: „minus x Quadrat," den letzteren: „minus oder negativ x ins Quadrat." Das Resultat des letzteren ist x^2. Ebenso sind die beiden Ausdrücke: $\frac{1}{2}x^2$ (gelesen: „ein halb x Quadrat") und $(\frac{1}{2}x)^2$ (gelesen: „ein halb x ins Quadrat") verschieden. Letzterer gibt ausgeführt: $\frac{1}{4}x^2$.

B. Übungsaufgaben.

a) Aufgaben mit Auflösung.

1) $[(a^4b^2c^3)^5]^6 = [a^{20}b^{10}c^{15}]^6 = a^{120}b^{60}c^{90}$

2) $(-2a^3)^4 + (-2a^4)^3 - (-3a^6)^2 - (-5a^4)^3$

D. Potenzg. ausgef.: $(16a^{12}) + (-8a^{12}) - (+9a^{12}) - (-125a^{12})$

D. Kl. aufgelöst: $16a^{12} - 8a^{12} - 9a^{12} + 125a^{12}$

D. Addition ausgeführt: $124a^{12}$.

b) Ungelöste Aufgaben.

S. Fuß, Aufgabensammlung §. 16.

§. 28. Quadrierung zusammengesetzter Ausdrücke.

A. Erklärungen und Lehrsätze.

a) Quadrierung eines Binoms.

Das Quadrat eines Binoms besteht aus dem Quadrat des ersten Gliedes, aus dem doppelten Produkte der zwei Glieder und aus dem Quadrat des zweiten Gliedes.

Beweis. Dem Potenzbegriff gemäß ist $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$. Diese Multiplikation ausgeführt, erhält man $a^2 + 2ab + b^2$. Ebenso ist $(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$. Beispiel: $43^2 = (40 + 3)^2 = 40^2 + 2 . 40 . 3 + 3^2 = 1600 + 240 + 9 = 1849$, oder $29^2 = (30 - 1)^2 = 900 - 60 + 1 = 841$.

Zusatz. Das Produkt aus der Summe und Differenz zweier Zahlen ist gleich der Differenz ihrer Quadrate; $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

b) Quadrierung eines Polynoms.

Das Quadrat eines Polynoms besteht aus dem Quadrat des ersten Gliedes, aus dem doppelten Produkt des ersten und zweiten Gliedes, aus dem Quadrat des zweiten Gliedes, aus der doppelten Summe des ersten und zweiten Gliedes multipliciert mit dem dritten Glied, aus dem Quadrat des dritten Gliedes u. s. w.

Behauptung. $(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2$.

Beweis. Setzt man $a + b = n$, so folgt: $(a + b + c)^2 = (n + c)^2 = n^2 + 2cn + c^2$. In den erhaltenen Ausdruck für n den Wert $a + b$ eingesetzt, ergibt sich: $(a + b)^2 + 2c(a + b) + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2$. — Ebenso ist $(a + b + c + d)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2 + 2(a + b + c)d + d^2$; denn faßt man $a + b + c$ als eine Zahl auf, so folgt $(a + b + c + d)^2 = [(a + b + c) + d]^2 = (a + b + c)^2 + 2(a + b + c)d + d^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2 + 2(a + b + c)d + d^2$. Auf gleiche Weise kann

die Richtigkeit des obigen Lehrsatzes auch für mehrgliederige Polynome dargethan werden.

Das Quadrieren dekadischer Zahlen. Von obigen Gesetzen kann auch beim Quadrieren numerischer Zahlen mit Vorteil Gebrauch gemacht werden, wie folgende Beispiele zeigen. $148^2 = (100 + 40 + 8)^2 = 100^2 + 2 . 100 . 40 + 40^2 + 2(100 + 40)8 + 8^2 = 10000 + 8000 + 1600 + 2240 + 64 = 21904$ oder $2435^2 = (2000 + 400 + 30 + 5)^2 = 2000^2 + 2 . 2000 . 400 + 400^2 + 2 . 2400 . 30 + 30^2 + 2 . 2430 . 5 + 5^2 = 5929225$.

B. Übungsaufgaben.

a) Aufgaben mit Auflösung.

1) $(3a^2 + 2b^3)^2 = 9a^4 + 12a^2b^3 + 4b^6$

2) $(2a^3 - 3b^4 + 4c^5)^2 = 4a^6 - 12a^3b^4 + 9b^8 + 16a^3c^5 - 24b^4c^5 + 16c^{10}$.

b) Ungelöste Aufgaben.

Man vergleiche: Fuß, Aufgabensammlung §. 17.

§. 29. Kubierung zusammengesetzter Ausdrücke.

A. Erklärungen und Lehrsätze.

a) Kubierung eines Binoms.

Der Kubus eines Binoms besteht aus dem Kubus des ersten Gliedes, aus dem dreifachen Quadrate des ersten Gliedes multipliciert mit dem zweiten, aus dem dreifachen ersten Gliede multipliciert mit dem Quadrat des zweiten Gliedes und aus dem Kubus des zweiten Gliedes.

Beweis. Dem Potenzbegriff gemäß ist $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b)$. Nun ist $(a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$ und $(a^2 + 2ab + b^2)(a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. — Kubierung einer zweistelligen dekadischen Zahl. $(20 + 4)^3 = 20^3 + 3 . 20^2 . 4 + 3 . 20 . 4^2 + 4^3 = 13824$.

b) Kubierung eines Polynoms.

Der Kubus eines Polynoms besteht aus dem Kubus des ersten Gliedes, aus dem dreifachen Quadrate des

ersten Gliedes multipliciert mit dem zweiten, aus dem dreifachen ersten Gliede multipliciert mit dem Quadrate des zweiten Gliedes, aus dem Kubus des zweiten Gliedes, aus dem dreifachen Quadrate der Summe des ersten und zweiten Gliedes multipliciert mit dem dritten Glied, aus der dreifachen Summe des ersten und zweiten Gliedes multipliciert mit dem Quadrate des dritten Gliedes, aus dem Kubus des dritten Gliedes u. s. w.

Behauptung. $(a + b + c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3$.

Beweis. Faßt man $a + b$ als eine Zahl auf, so folgt: $[(a + b) + c]^3 = (a + b)^3 + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3$. In ähnlicher Weise läßt sich die Richtigkeit der obigen Behauptung auch für Polynome mit mehr als drei Gliedern darthun. Dekadische Zahlen können in ähnlicher Weise kubiert werden.

Höhere Potenzen. Aus den vorstehend entwickelten Gesetzen ergibt sich auch, wie Ausdrücke folgender Art zu behandeln sind: $(a + b)^4$ oder $(a + b)^6$. Es ist nämlich $(a + b)^4 = [(a + b)^2]^2$ und $(a + b)^6 = [(a + b)^3]^2$.

B. Übungsaufgaben.

Man vergleiche: Fuß, Aufgabensammlung §. 18 und 19.

Dritter Abschnitt.

Von den Wurzeln.

§. 30. Die Wurzeln im allgemeinen.

A. Erklärungen.

a) Begriff: Wurzel einer Zahl.

Die Zahlen 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 u. s. f. sind alle in zwei gleiche Faktoren zerlegbar, nämlich 9 in 3 . 3, 16 in 4 . 4, 25 in 5 . 5 u. s. f. Ebenso lassen sich die Zahlen 8, 27, 64, 125 u. s. w. in je drei gleiche Faktoren zerlegen, 8 in 2 . 2 . 2, 27 in 3 . 3 . 3, 64 in 4 . 4 . 4, 125 in 5 . 5 . 5. Zahlen, wie 16, 81, 256, 625 u. s. f. können in 4 gleiche Faktoren zerfällt werden, nämlich 16 in 2 . 2 . 2 . 2, 81 in 3 . 3 . 3 . 3, 256 in 4 . 4 . 4 . 4, 625 in 5 . 5 . 5 . 5. Diese gleichen Faktoren, in welche sich Zahlen zerlegen lassen, heißen Wurzeln der Zahlen. Unter der Wurzel einer Zahl versteht man demnach den einen der gleichen Faktoren, in welche sich diese zerlegen läßt. Die Zahl, welche angibt, in wie viel gleiche Faktoren eine gegebene Zahl zerlegt werden soll, heißt der Wurzelexponent. Die zu zerlegende Zahl führt den Namen Radicand. Das Geschäft der Zerlegung einer Zahl in zwei oder mehrere gleiche Faktoren nennt man das Wurzelausziehen oder Radicieren. Diese Operation wird durch das Wurzelzeichen $\sqrt{\ }$ (ein verzogenes r, der Anfangsbuchstabe des Wortes radix=Wurzel) angedeutet, unter welches der Radicand, über welches der Wurzelexponent geschrieben wird. Der Ausdruck $\sqrt{25}$ bedeutet also, der Radicand 25 soll in 2 gleiche Faktoren zerlegt werden. Jeder Ausdruck, vor dem sich ein Wurzelzeichen befindet, heißt ein Wurzelausdruck. (Wurzelgröße). Unter der Quadratwurzel oder zweiten Wurzel einer Zahl versteht man den einen der zwei gleichen Faktoren, in welche die Zahl zerlegt werden kann. So ist 2 die Quadratwurzel aus 4. Die symbolische Bezeichnung für das Ausziehen der Quadratwurzel

ist: $\sqrt[2]{4}$, oder $\sqrt{4}$, allgemein $\sqrt{a}$ (man liest: Quadratwurzel aus a). Den einen der 3 gleichen Faktoren, in die sich eine Zahl zerlegen läßt, nennt man die Kubikwurzel oder dritte Wurzel dieser Zahl; 3 ist also die Kubikwurzel aus 27 (Bezeichnung: $\sqrt[3]{27}$, gelesen: Kubikwurzel aus 27). Endlich versteht man unter der Biquadratwurzel oder vierten Wurzel einer Zahl den einen der 4 gleichen Faktoren, in welche die Zahl zerfällbar ist; 2 ist also die Biquadratwurzel aus 16.

b) Rationale und irrationale Zahlen.

Das Quadrat von $\frac{5}{2}$ ist $\frac{25}{4}$; der Kubus von $\frac{5}{2} = \frac{125}{8}$. Diese zwei Beispiele zeigen, daß die Potenz eines eigentlichen Bruches wiederum ein Bruch ist. Mit Hilfe dieses Satzes läßt sich nachweisen, daß die Wurzeln vieler Zahlen weder durch ganze Zahlen, noch durch gemischte Zahlen genau darstellbar sind. Aus den Zahlen 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 sind die Quadratwurzeln der Reihe nach 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 7; allein aus den dazwischen liegenden Zahlen 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10 u. s. w. lassen sich die Quadratwurzeln nicht genau ausziehen; denn angenommen, die Quadratwurzel aus 8 existiere, so müßte diese eine Zahl sein, die zwischen 2 und 3 läge, weil $2 . 2 = 4$, also weniger als 8 und $3 . 3 = 9$, also mehr als 8 ist; sie müßte also eine gemischte Zahl sein. Da nun aber ein eigentlicher Bruch, ins Quadrat erhoben, keine ganze Zahl gibt, so folgt, daß sich die Quadratwurzel aus 8 nicht vollständig angeben läßt. Selbstverständlich gilt das Gesagte auch für $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{26}$, $\sqrt[4]{17}$ u. s. w. Obgleich nun von sehr vielen Zahlen keine vollständige Quadratwurzel u. s. w. existiert, so lassen sich doch für alle positiven Zahlen näherungsweise alle Wurzeln bestimmen. Zahlen, die sich weder durch ganze Zahlen, noch durch Brüche genau darstellen lassen, heißen irrationale Zahlen; solche sind z. B. $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$. Alle bisher betrachteten Zahlen dagegen, nämlich alle ganzen und gebrochenen, sowohl positiven als negativen Zahlen, heißen rationale Zahlen. — Die irrationalen Zahlen haben mit der Einheit kein Maß gemeinschaftlich. Daher nennt man eine rationale und irrationale Zahl inkommensurabel (das Verhältnis der Peripherie eines Kreises zu seinem

Durchmesser, der Diagonale eines Quadrats zu seiner Seite ($\sqrt{2}$: 1) sind irrationale Zahlen).

B. **Übungsaufgaben.**

Man vergleiche: Fuß, Aufgabensammlung §. 20.

§. 31. Das Ausziehen der Quadratwurzel aus bestimmten Zahlen.

A. Erklärungen und Lehrsätze.

a) Grund der Einteilung des Radikanden in Klassen zu zwei Stellen.

$1^2 = 1$	$10^2 = 100$	$100^2 = 10000$
$2^2 = 4$	$60^2 = 3600$	$300^2 = 90000$
$4^2 = 16$	$80^2 = 6400$	$450^2 = 202500$
$9^2 = 81$	$99^2 = 9801$	$999^2 = 998001$

Aus diesen Beispielen geht hervor:

Das Quadrat

einer	1	zffg.	Zahl	ist	entweder	eine	1	oder	2	ziffg. Zahl,
〃	2	〃	〃	〃	〃	〃	3	〃	4	〃 〃
〃	3	〃	〃	〃	〃	〃	5	〃	6	〃 〃
〃	4	〃	〃	〃	〃	〃	7	〃	8	〃 〃
〃	5	〃	〃	〃	〃	〃	9	〃	10	〃 〃
〃	n	〃	〃	〃	〃	〃	(2n—1)	〃	2n	〃 〃

Mit Worten: Das Quadrat einer Zahl enthält entweder doppelt so viel Stellen als dieselbe, oder doppelt so viele Stellen weniger eine.

Umgekehrt ist auch die Quadratwurzel aus

jeder	1	und	2	ziffg.	Quadratzahl	eine	1	zifferige Zahl,
〃	3	〃	4	〃	〃	〃	2	〃 〃
〃	5	〃	6	〃	〃	〃	3	〃 〃
〃	7	〃	8	〃	〃	〃	4	〃 〃
〃	9	〃	10	〃	〃	〃	5	〃 〃
〃	(2n—1)	〃	2n	〃	〃	〃	n	〃 〃

Man teilt daher beim Ausziehen der Quadratwurzel den Radikanden von rechts nach links durch senkrechte Striche in Klassen zu zwei Stellen ein. So viele Klassen dann der Radikand hat, so viele Stellen hat die Wurzel.

b) Das Ausziehen der Quadratwurzel aus positiven ganzen Zahlen.

α) Die Zahlen sind vollkommene Quadrate.

1) $\sqrt{7921}$*) = ?

1) Aus a dieses §. folgt, daß die zu suchende Quadratwurzel eine zweizifferige Zahl ist, weshalb man sie durch $(a + b)$ darstellen kann; a bezeichnet die Anzahl der Zehner, b die der Einer. Mithin ist 7921 $= (a + b)^2$. Da nun $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ist, so ist eigentlich nur die Aufgabe gestellt, die Zahl 7921 in die Zahlenwerte dieser drei Glieder zu zerlegen.

2) a bedeutet eine bestimmte Anzahl Zehner, also a^2 eine gewisse Anzahl Hunderter, d h. eine Zahl, die am Schluß zwei Nullen hat. Mithin müssen die Ziffern des Zahlenwertes a^2 in der Klasse links, nämlich in 79, d. h. 7900 enthalten sein; mit andern Worten: a^2 stellt eine Zahl vor, die höchstens 7900 betragen kann. Nun sind die Quadrate der Zehner der Reihe nach 100, 400, 900, 1600, 2500, 3600, 4900, 6400, 8100; da 7900 zwischen 6400 und 8100 liegt, so muß die zu suchende Quadratwurzel zwischen 80 und 90 liegen. Das höchste vollständige Quadrat, welches in 7900 enthalten ist, ist 6400, mithin ist $a^2 = 6400$, also a (der Zehner) = 80. Der erste Teil der Wurzel oder a ist demnach = 80.

3) Subtrahiert man nun den Zahlenwert von a^2, nämlich 6400, von 7921, welche Zahl $= a^2 + 2ab + b^2$ ist, so muß der Rest 1521 $= 2ab + b^2$ sein. Das Glied 2ab ist ein Produkt aus Einern und Zehnern; es hat folglich keine Einer, stellt also eine Zahl vor, die am Ende eine Null hat; mithin kann von den Ziffern des Zahlenwertes 2ab in der letzten Ziffer 1 des Restes 1521 nichts enthalten sein, sie müssen in 152, d. h. 1520 stecken (2ab stellt eine Zahl vor, die höch-

*) Es empfiehlt sich, zunächst vor den Augen der Schüler das Quadrat 7921 durch Quadrieren der Zahl 89 entstehen zu lassen; nämlich: $(a + b)^2 = 89^2 = (80 + 9)^2$:

$$\begin{array}{rcccr} a^2 & = & 80^2 & = & 6400 \\ 2ab & = & 2 \cdot 80 \cdot 9 & = & 1440 \\ b^2 & = & 9^2 & = & 81 \\ \hline \end{array}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 80^2 + 2 \cdot 80 \cdot 9 + 9^2 = 7921$$

stens 1520 betragen kann). Es ist nun einleuchtend, daß b gefunden wird, wenn man mit 2a, nämlich 160 in 1520 dividiert. Da 160 in 1520 neun mal enthalten ist, so ist dieser Quotient 9 = b, also 2ab = 2 . 80 . 9 = 1440.

4) Subtrahiert man 2ab = 1440 von 2ab + b^2 = 1521, so bleibt $b^2 = 81$; da nun b = 9, also $b^2 = 81$ ist, diese Zahl aber den noch übrig bleibenden Rest von 81 aufhebt, so folgt, daß die gesuchte Quadratwurzel 80 + 9 = 89 ist.

Es ist also:

$$a^2 = 80^2 = 6400$$
$$2ab = 2 . 80 . 9 = 1440$$
$$b^2 = 9^2 = 81$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 80^2 + 2 . 80 . 9 + 9^2 = 7921.$$

Für das Rechnen empfiehlt sich folgende übersichtliche Anordnung:

$$a + b,\ a^2 + 2ab + b^2$$
$$\sqrt{79|21} = 80 + 9$$
$$a^2 = 6400$$
$$2a = 160^{*)}\ |\ 1521$$
$$2ab = 1440$$
$$81$$
$$b^2 = 81$$
$$0$$

Die Bestimmung von 2ab und b^2 läßt sich in folgender Weise zusammenfassen:

$$a + b,\ a^2 + 2ab + b^2$$
$$\sqrt{79|21} = 80 + 9$$
$$a^2 = 6400$$
$$2a = 160|1521$$
$$2ab + b^2 = 1521$$
$$0$$

*) Der Dividendus gehört zwar vor den Divisor, allein beim Wurzelausziehen soll, größerer Übersicht halber, der Divisor vor den Dividendus gestellt werden. Wer gegen diese Stellung Bedenken hat, der schreibe 1521 : (2a = 160) u. s. w.

Dies Verfahren kann durch Weglassung der Nullen in folgender Art abgekürzt werden:

$$a + b,\ a^2 + 2ab + b^2.$$

$$\sqrt{79|21} = 8\ 9$$

$$a^2 = 64$$

$$2a = 16 \mid 1521$$

$$2ab + b^2 = 1521$$

$$0$$

2) $\sqrt{474721} = ?$

1) Der Radikand ist eine sechszifferige Zahl, mithin wird die zu suchende Quadratwurzel dreizifferig, kann also durch $(a + b + c)$ dargestellt werden; a bedeutet die Hunderter, b die Zehner und c die Einer der zu suchenden Quadratwurzel. Mithin ist $474721 = (a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2$. In diese 5 Glieder muß die Zahl 474721 zerlegt werden.

2) Da a^2 das Quadrat einer gewissen Anzahl von Hundertern bezeichnet, so stellt dieser Ausdruck eine Zahl vor, die am Schluß vier Nullen hat, kann also im vorliegenden Fall höchstens 470000 betragen. Diese Zahl ist aber nicht das Quadrat eines Hunderters, sondern die darunter liegende Zahl 360000, und zwar ist diese das Quadrat von 600. Demnach ist der erste Teil der Wurzel 600.

3) In dem Rest 114721 sind noch die Werte von $2ab$, b^2, $2(a + b)c$ und c^2 enthalten. Der Ausdruck $2ab$ stellt eine Zahl vor, die am Schluß drei Nullen hat, die also im vorliegenden Fall höchstens 114000 betragen kann. Man findet nun b, wenn man mit $2a = 1200$ in 114000 dividiert. 1200 ist in 114000 achtzigmal enthalten. Demnach beträgt der zweite Teil der Wurzel = 80. Man kann nun $2ab = 96000$ und $b^2 = 6400$, zusammen $2ab + b^2 = 102400$ von 114721 subtrahieren.

4) In dem Rest 12321 sind noch die Zahlenwerte von $2(a + b)c$ und c^2 enthalten. $2(a + b)c$ stellt eine Zahl vor, die aus der doppelten Summe von Hundertern und Zehnern mit Einern multipliciert besteht; diese muß daher am Schluß eine Null haben, kann also nur höchstens 12320 betragen. Dividiert man demnach mit $2(a + b) = 1360$ in 12320, so muß man c erhalten. Nachdem man $c = 9$ bestimmt hat, kann man $2(a + b)c = 12240$ und $c^2 = 81$, zusammen 2(a

$+ b)c + c^2 = 12321$ von 12321 subtrahieren. — Das Gesagte läßt sich in folgender Weise übersichtlich darstellen:

$$
\begin{array}{l}
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a + b + c,\ a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2. \\
\sqrt{474721} = 600 + 80 + 9 = 689 \\
a^2 = 360000 \\
\hline
2a = 1200 \mid 114721 \\
2ab + b^2 = 102400 \\
\hline
2(a+b) = 1360 \mid 12321 \\
2(a+b)c + c^2 = 12321 \\
\hline
0
\end{array}
$$

5) Durch Weglassung der Nullen läßt sich dieses Verfahren abkürzen, nämlich so:

$$
\begin{array}{l}
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a+b+c,\ a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2. \\
\sqrt{47|47|21} = 6\ 8\ 9 \\
a^2 = 36 \\
\hline
2a = 12|1147 \\
2ab + b^2 = 1024 \\
\hline
2(a+b) = 136|12321 \\
2(a+b)c + c^2 = 12321 \\
\hline
0
\end{array}
$$

Erläuterung. Zunächst teilt man den Radikanden von rechts nach links in zweistellige Klassen. Da man 3 Klassen erhält, so muß die Wurzel dreizifferig werden; ihre Hunderter bezeichnet man mit a, ihre Zehner mit b und ihre Einer mit c. Das Quadrat hievon ist $a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2$. a^2 bezeichnet eine Zahl, die vier Nullen hat; die werthabenden Ziffern derselben sind also nur in 47 enthalten. Daher bestimmt man diejenige größte ganze Zahl, deren Quadrat in 47 enthalten ist. Diese ist hier 6 (eigentlich 600). Man subtrahiert nun $a^2 = 36$ von 47 und setzt zu dem Rest 11 bloß die nächste Klasse 47 herunter. Man braucht bloß eine Klasse herunterzusetzen, weil die Zahlenwerte von 2ab und b^2, die jetzt zu bestimmen sind, zusammen eine Zahl ergeben, die zwei Nullen hat. Um b zu finden, dividiert man nun mit $2a = 12$ in 114 und nicht in 1147, weil 2ab eine Zahl vorstellt, die 3 Nullen hat u. s. w.

$a + b + c + d, a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2 + 2(a + b + c)d + d^2.$

3) $\sqrt{32171584} = 5000 + 600 + 70 + 2 = 5672$

$$
\begin{array}{rl}
a^2 = & 25000000 \\
\hline
2a = 10000 & |\ 7171584 \\
2ab + b^2 = & 6360000 \\
\hline
2(a+b) = 11200 & |\ 811584 \\
2(a+b)c + c^2 = & 788900 \\
\hline
2(a+b+c) = 11340 & |\ 22684 \\
2(a+b+c)\,d + d^2 = & 22684 \\
\hline
& 0
\end{array}
$$

Mit Weglassung der Nullen und der Buchstabenausdrücke.

$\sqrt{32|17|15|84} = 5672$

$$
\begin{array}{rl}
 & 25 \\
\hline
10 & |717 \\
 & 636 \\
\hline
112 & |8115 \\
 & 7889 \\
\hline
1134 & |22684 \\
 & 22684 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

4) $\sqrt{25|83|68|89} = 5083$

$$
\begin{array}{rl}
 & 25 \\
\hline
100 & |8368 \\
 & 8064 \\
\hline
1016 & |30489 \\
 & 30489 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

5) $\sqrt{9|00|24|00|16} = 30004$

$$
\begin{array}{rl}
 & 9 \\
\hline
6000 & |240016 \\
 & 240016 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

β) Die Zahlen sind keine vollkommenen Quadrate.

```
 √5 = 2,23606 . . . .
  4
 ------
  4|100
     84
 ------
 44|1600
    1329
 ------
446|27100
    26796
 ------------
44720|3040000
      2683236
```

Erläuterung. $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{5}$ muß demnach zwischen 2 und 3 liegen. Der Zahl 5 kann man sich, ohne ihren Wert zu verändern, eine Reihe von Nullen als Dezimalstellen angehängt denken, also 5,00000000. Je zwei solcher Nullen setzt man nun nach einander als eine Klasse herab und verfährt im übrigen nach der oben gelehrten Methode.

c) Das Ausziehen der Quadratwurzel aus Bruchzahlen.

α) Aus Dezimalbrüchen.

$0{,}1^2 = 0{,}01$	$0{,}01^2 = 0{,}0001$	$0{,}001^2 = 0{,}000001$
$0{,}5^2 = 0{,}25$	$0{,}02^2 = 0{,}0004$	$0{,}002^2 = 0{,}000004$
$0{,}6^2 = 0{,}36$	$0{,}09^2 = 0{,}0081$	$0{,}007^2 = 0{,}000049$
$0{,}9^2 = 0{,}81$	$0{,}98^2 = 0{,}9684$	$0{,}367^2 = 0{,}134689$

Aus diesen Beispielen ergibt sich folgendes:

Die Quadratzahlen der Zehntel sind Hundertel, die der Hundertel Zehntausendtel, die der Tausendtel Milliontel. Mithin hat die Quadratzahl eines Dezimalbruchs immer doppelt soviel Stellen als dieser. Aus diesem Grunde wird auch jeder Dezimalbruch, aus dem die Quadratwurzel gezogen werden soll, in Klassen zu je zwei Ziffern eingeteilt, (vom Komma aus nach rechts, falls Ganze vorhanden sind, selbstverständlich auch nach links). Hat die letzte Klasse der Dezimalen nur eine Stelle,

so wird eine Null angehängt. Im übrigen ist das Verfahren dem bisherigen ganz analog.

$$1)\ \sqrt{0{,}11|90|25} = 0{,}345$$

```
  9
 ----
 6|290
   256
 ------
 68|3425
    3425
 -------
       0
```

$$2)\ \sqrt{14|43{,}84|80|04} = 37{,}998$$

```
 9
 ----
 6|543
   469
 ------
 74|7484
    6741
 --------
 758|74380
     68301
 ----------
 7598|607904
      607904
 -----------
           0
```

β) Aus gemeinen Brüchen.

Sind Zähler und Nenner rational, so zieht man aus beiden die Quadratwurzel. Ist dies nicht der Fall, so kann man den Bruch derartig erweitern, daß der Nenner rational wird, oder man verwandelt den gemeinen Bruch in einen Dezimalbruch und zieht dann aus diesem die Quadratwurzel.

γ) Aus gemischten Zahlen.

Man verwandelt dieselben in unechte Brüche und verfährt dann wie bei β).

Fassen wir nun das ganze Verfahren, das beim Ausziehen der Quadratwurzel einzuschlagen ist, kurz und bündig zusammen, so ergibt sich:

1) Man teilt die gegebene Quadratzahl von rechts nach links in Klassen zu je 2 Stellen; die Zahl der Klassen ist gleich der Anzahl der Stellen in der Wurzel.

2) Man sucht eine Zahl, deren Quadrat das größte ist, welches von der ersten Klasse links des gegebenen Quadrats zu subtrahieren ist; sie ist die erste Ziffer der Wurzel.

3) Zu dem Rest, den man erhält, wenn man das Quadrat dieser ersten Ziffer der Wurzel von der ersten Klasse des gegebenen Quadrats subtrahiert, schreibt man die nächste Klasse herunter, denkt sich rechts eine Ziffer abgestrichen und dividiert mit dem doppelten der bereits gefundenen Wurzel in das Übrige.

4) Nun multipliciert man den erhaltenen Quotienten, die zweite Ziffer der zu suchenden Wurzel, mit sich selbst, dann mit dem letzten Divisor und subtrahiert das erhaltene Produkt.

5) Sodann nimmt man die nächste Klasse herunter, denkt sich rechts wieder eine Ziffer abgestrichen u. s. w. (3 u. 4).

6) Dies Verfahren wird solange fortgesetzt, bis alle Klassen herunter genommen sind. Geht die Rechnung auf, so ist die Wurzel genau gefunden; geht sie nicht auf, so setzt man statt der fehlenden Ziffer Nullenpaare herunter und macht in der Wurzel das Dezimalkomma.

B. Übungsaufgaben.

Man vergleiche: Fuß Aufgabensammlung § 21.

§. 32. Das Ausziehen der Kubikwurzel aus bestimmten Zahlen.

A. Erklärungen und Lehrsätze.

a) Grund der Einteilung des Radikanden in Klassen zu drei Stellen.

$1^3 = 1$	$10^3 = 1000$	$100^3 = 1000000$
$3^3 = 27$	$59^3 = 505379$	$451^3 = 91733851$
$9^3 = 729$	$99^3 = 970299$	$999^3 = 997002999.$

Diese Beispiele lehren:

Der Kubus

einer	1	zff.	Zahl	ist	entweder	eine	1, 2	oder	3	zff.	Zahl,
„	2	„	„	„	„	„	4, 5	„	6	„	„ ,
„	3	„	„	„	„	„	7, 8	„	9	„	„ ,
„	4	„	„	„	„	„	10, 11	„	12	„	„ ,
„	n	„	„	„	„	„	(3n—2), (3n—1).		3n	„	„ .

Mithin ist auch die Kubikwurzel aus

jeder	1, 2	oder	3	ziffg.	Zahl	eine	1	ziffg. Zahl,
„	4, 5	„	6	„	„	„	2	„ „
„	7, 8	„	9	„	„	„	3	„ „ ,
„	10, 11	„	12	„	„	„	4	„ „ ,
„	(3n—2), (3n—1)	„	3n	„	„	„	n	„ „ .

Man teilt daher beim Ausziehen der Kubikwurzel den Radikanden von rechts nach links durch senkrechte Striche in Klassen zu drei Stellen ein. So viele Klassen dann der Radikand hat, so viele Stellen hat die Wurzel.

b) Das Ausziehen der Kubikwurzel aus ganzen Zahlen.

1) $\sqrt[3]{658503} = ?$

1) Nach a dieses § ist die zu suchende Kubikwurzel eine zweizifferige Zahl, mithin ist sie durch $(a + b)$ darstellbar und die gegebene Zahl 658503 selbst kann durch $(a + b)^3$ ausgedrückt werden. Da nun $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ist, so hat man hier die Aufgabe zu lösen, die Zahl 658503 in die Zahlenwerte dieser vier Glieder zu zerlegen.

2) a bedeutet eine gewisse Anzahl Zehner, also a^3 eine bestimmte Anzahl Tausender, d. h. eine Zahl, die am Schluß 3 Nullen hat. Demnach können die Ziffern des Zahlenwertes von a^3 nicht in den 3 letzten Ziffern der Zahl 658503, nämlich in 503, sondern müssen in der Klasse links, nämlich in 658, d. h. 658000 stecken. Nun sind die Kuben der Zehner der Reihe nach 1000, 8000, 27000, 64000, 125000, 216000, 343000, 512000, 729000. Da 658000 zwischen 512000 und 729000 liegt, so muß die zu suchende Kubikwurzel zwischen 80 und 90 liegen. Der höchste vollständige Kubus eines Zehners, der in 658000 steckt, ist 512000, mithin ist $a^3 = 512000$ und $a = 80$. Der erste Teil der Wurzel ist also 80.

3) Subtrahiert man nun den Zahlenwert von a^3, nämlich 512000 von 658503, welche Zahl $= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ist, so muß der Rest $146503 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ sein. a steht für eine gewisse Anzahl Zehner, mithin a^2 für Hunderter; der Ausdruck $3a^2b$ ist dem-

nach ein Produkt aus Hundertern und Einern; die Zahl, welche von diesem Glied repräsentiert wird, hat mithin am Schlusse zwei Nullen. Deshalb ist von der Zahl, deren Stellvertreter $3a^2b$ ist, in den 2 letzten Ziffern des Restes, nämlich in 03 nichts enthalten; sie kann also nur in den 4 ersten, nämlich in 1465, d. i. 146500 enthalten sein. Da nun $3a^2b : 3a^2 = b$ ist, so folgt, daß b erhalten wird, indem man die Zahl 146500 durch $3a^2$, d. h. $3 \,.\, 80^2 = 19200$ dividiert. Der erhaltene Quotient 7 muß mithin b und daher $3a^2b = 3 \,.\, 80^2 \,.\, 7 = 134400$ sein.

4) Subtrahiert man nun den Zahlenwert $3a^2b = 134400$ von dem Reste $146503 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, so muß der nunmehrige Rest, nämlich $12103 = 3ab^2 + b^3$ sein. Der Ausdruck $3 \,.\, 40 \,.\, 3^2$, ein Produkt von Zehnern und dem Quadrate von Einern, hat, als eine Zahl dargestellt, nämlich als 1080, am Schlusse rechts eine Null; mithin muß auch die Zahl, welche von dem Glied $3ab^2$ repräsentiert wird (es ist ein Produkt von Zehnern in das Quadrat von Einern) am Schlusse rechts eine Null haben. Folglich müssen die Ziffern dieses Zahlenwertes in den vier ersten Ziffern des Restes 12103, nämlich in 1210, d. i. 12100 enthalten sein. Subtrahiert man daher $3ab^2 = 3 \,.\, 80 \,.\, 7^2 = 11760$ von dem Rest $12103 = 3ab^2 + b^3$, so muß der Rest $343 = b^3$ sein.

5) Da nun $b^3 = 7^3 = 343$ den Rest 343 tilgt, so ist die Kubikwurzel gefunden; sie heißt $80 + 7 = 87$.

Es ist also:

$$\begin{array}{rcrcr} a^3 & = & 80^3 & = & 512000 \\ 3a^2b & = & 3 \,.\, 80^2 \,.\, 7 & = & 134400 \\ 3ab^2 & = & 3 \,.\, 80 \,.\, 7^2 & = & 11760 \\ b^3 & = & 7^3 & = & 343 \\ \hline \end{array}$$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 80^3 + 3 \,.\, 80^2 \,.\, 7 + 3 \,.\, 80 \,.\, 7^2 + 7^3 = 658503.$$

Diese Rechnungen lassen sich in folgender Weise übersichtlich darstellen:

$$\sqrt[3]{658|503} = \overset{a}{80} + \overset{b}{7} = 87.$$

$$\begin{array}{rcrl} & a^3 = & 512000 & \\ \hline 3a^2 = & 19200 | & 146503 & - \\ 3a^2b = & & 134400 & \\ 3ab^2 = & & 11760 & \Big\} = 146503 \\ b^3 = & & 343 & \\ \hline & & 0 & \end{array}$$

Durch Weglassung der Nullen kann man wie folgt abkürzen:

$$\sqrt[3]{658|503} = 8\ 7$$

$$a^3 = 512$$

$$\begin{array}{rll} 3a^2 = & 192|146503 & - \\ 3a^2b = & 1344 & \\ 3ab^2 = & 1176 & \\ b^3 = & 343 & \end{array} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} = 146503$$

$$0$$

2) $\sqrt{123505992} = ?$

Die Kubikwurzel aus dieser Zahl muß eine dreizifferige Zahl sein, weshalb sie durch (a + b + c), die Zahl 123505992 selbst durch $(a + b + c)^3$ darstellbar ist. Da nun $(a + b + c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a + b)^2c + 3(a + b)\,c^2 + c^3$ ist, so folgt, daß die gegebene Zahl in die Zahlenwerte dieser 7 Glieder zu zerlegen ist. Die Schlüsse sind in diesem Beispiel selbstverständlich dieselben, wie im ersten, weshalb sie nur angedeutet werden sollen.

$$\sqrt[3]{123|505|992} = 498$$

$$a^3 = 64$$

$$\begin{array}{rll} 3a^2 = & 48|59505 & - \\ 3a^2b = & 432 & \\ 3ab^2 = & 972 & \\ b^3 = & 729 & \end{array} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} = 53649$$

$$\begin{array}{rll} 3(a+b)^2 = & 7203|5856992 & - \\ 3(a+b)^2c = & 57624 & \\ 3(a+b)c^2 = & 9408 & \\ c^3 = & 512 & \end{array} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} = 5856992$$

$$0$$

c) Das Ausziehen der Kubikwurzel aus unvollständigen Kuben, aus Dezimalbrüchen, gemeinen Brüchen und gemischten Zahlen.

Wie hiebei zu verfahren ist, ergibt sich aus den analogen Fällen der Quadratwurzelausziehung.

Das Verfahren, das beim Ausziehen der Kubikwurzel zu befolgen ist, geht aus den vorstehenden zwei Beispielen klar hervor. Fassen wir es kurz und bündig zusammen:

1) Man teilt die gegebene Zahl von den Einern an in Klassen zu je 3 Ziffern (die äußerste Klasse links kann auch nur 1 oder 2 Ziffern enthalten).

2) Von der ersten Klasse links subtrahiert man die möglichst große Kubikzahl und schreibt die zugehörige Wurzel als ersten Teil der zu suchenden Wurzel.

3) Zum Rest nimmt man die Ziffern der nächsten Klasse herunter und denkt sich rechts 2 Stellen abgestrichen.

4) Das Übrige dividiert man durch das dreifache Quadrat des gefundenen ersten Teils der Wurzel.

5) Den so erhaltenen Quotienten schreibt man als zweiten Teil der gesuchten Wurzel.

6) Man multipliciert ihn nun mit dem letzten Divisor und setzt dies Produkt unter das in 3) erhaltene Resultat so, daß die letzte Ziffer unter die drittletzte zu stehen kommt; sodann bildet man ein Produkt aus dem Quadrat des Quotienten und dem 3 fachen des ersten Teils der Wurzel und schreibt es von der vorletzten Stelle an unter; endlich setzt man noch den Kubus des Quotienten, von der letzten Stelle des Resultats in 3) angefangen, unter, addiert diese 3 Produkte und subtrahiert sie hierauf von dem Resultat 3).

7) Bleibt ein Rest, so wird die Rechnung, nach den Regeln von 3) angefangen, fortgesetzt.

8) Bei irrationalen Kubikwurzeln hängt man dem Rest jedesmal 3 Nullen an.

B. Übungsaufgaben.

S. Fuß. Aufgabensammlung §. 22.

§. 33. Das Radicieren der verschiedenen Zahlformen.

A. Erklärungen und Lehrsätze.

I. Das Radicieren von Monomen.

a) Die aus dem Begriff des Radicierens sich unmittelbar ergebenden Gesetze.

1) Wird eine Wurzel mit ihrem Wurzelexponenten potenziert, so erhält man den Radikanden.

Behauptung. $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

Beweis. Nach §. 30 versteht man unter „Wurzel einer Zahl" einen der gleichen Faktoren, in welche diese Zahl zerlegbar ist. Dieser Definition zufolge muß man die ursprüngliche Zahl, den Radikanden, wieder erhalten, wenn man die Wurzel derselben so viel mal als Faktor setzt, als die Anzahl der gleichen Faktoren beträgt, oder, kürzer ausgedrückt, wenn man die Wurzel mit dem Wurzelexponenten potenziert. Ist also $\sqrt{25} = 5$, so muß $5 \,.\, 5 = 5^2$ oder $(\sqrt{25})^2 = 25$ sein. Ebenso ist $(\sqrt{a})^2 = a$ und $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

2) Wird eine Potenz durch ihren Exponenten radiciert, so erhält man ihre Basis.

Behauptung. $\sqrt[n]{a^n} = a$.

Beweis. $\sqrt[n]{a^n}$ bedeutet diejenige Zahl, welche zur nten Potenz erhoben, die Zahl a^n gibt. Diese Zahl ist a.

3) Aus den Sätzen 1) und 2) folgt: Eine Zahl bleibt unverändert, wenn man sie durch eine Zahl radiciert und die erhaltene Wurzel mit derselben Zahl potenziert und umgekehrt. Das Radicieren ist also die dem Potenzieren entgegengesetzte Operation. Daraus folgt, daß man durch Umkehrung der Lehrsätze über das Potenzieren zu den analogen Sätzen des Radicierens gelangt, daß man so radicieren muß, wie man potenzierte.

b) Radicierung eines Produkts.

1) Ein Produkt wird durch eine Zahl radiciert, indem man jeden Faktor durch diese Zahl radiciert und die erhaltenen Wurzeln mit einander multipliciert.

Behauptung. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{b}$.

Beweis. Es ist hier zu beweisen, daß $(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = ab$ ist. Wendet man auf die letzte Potenz den Satz an, daß ein Produkt potenziert wird, indem man jeden Faktor potenziert, so erhält man $(\sqrt[n]{a})^n \,.\, (\sqrt[n]{b})^n$; dies ist nach Satz 1) unter a) dieses §

$= a \cdot b$, w. z. b. w. — Beispiele. $\sqrt{64} = \sqrt{4 \cdot 16} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{16} = 2 \cdot 4 = 8$. $\sqrt{64} = \sqrt{4 \cdot 4 \cdot 4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{4} = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

2) Wurzeln von gleichen Wurzelexponenten werden mit einander multipliciert, indem man das Produkt der Radikanden durch den gemeinschaftlichen Wurzelexponenten radiciert.

Umkehrung von Satz 1). $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$. — Beispiele. $\sqrt{4} \cdot \sqrt{16} = \sqrt{4 \cdot 16} = \sqrt{64} = 8$. $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2 \cdot 4} = \sqrt[3]{8} = 2$.

3) Auf dem Lehrsatze 1) beruht die s. g. Ausscheidung eines rationalen Faktors, z. B.
$\sqrt[n]{a^n \cdot b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = a\sqrt[n]{b}$; $\sqrt[3]{800} = \sqrt[3]{8 \cdot 100} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{100} = 2\sqrt[3]{100}$.

4) Auf dem Satze 2) beruht das umgekehrte Verfahren, einen vor einem Wurzelausdruck stehenden Faktor unter das Wurzelzeichen zu bringen. Es geschieht dies nämlich, indem man den Faktor zur Potenz des Wurzelexponenten erhebt und mit dieser Potenz den Radikanden multipliciert, z. B.
$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$; $2\sqrt[3]{100} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 100} = \sqrt[3]{800}$.

c) Radicierung eines Quotienten.

1) Ein Quotient wird durch eine Zahl radiciert, indem man sowohl den Dividendus als den Divisor durch diese Zahl radiciert und erstere Wurzel durch letztere dividiert.

Behauptung. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Beweis. Es ist hier zu beweisen, daß $(\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b})^n = a : b$ ist. Wendet man auf die Potenz $(\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b})^n$ das Gesetz an: ein

Quotient wird potenziert, indem man Divisor und Dividendus potenziert, so erhält man $(\sqrt[n]{a})^n : (\sqrt[n]{b})^n$, und dies ist nach Satz a) dieses § gleich a : b, w. z. b. w. — Beispiele. $\sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}} = \frac{5}{6}$; $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{3}{4}$.

2) Zwei Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten werden durch einander dividiert, indem man ihre Radikanden durch einander dividiert und den erhaltenen Quotienten durch den gemeinschaftlichen Wurzelexponenten radiciert.

Umkehrung von Satz 1) $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{(a : b)}$. — Beispiel. $\sqrt[3]{16} : \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{16 : 2} = \sqrt[3]{8} = 2$.

d) Radicierung einer Potenz.

Eine Potenz wird durch eine Zahl radiciert, indem man den Exponenten der Potenz durch diese Zahl dividiert und die Basis mit dem erhaltenen Quotienten potenziert.[1])

Behauptung. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

Beweis. Hier ist zu beweisen, daß $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^m$ ist. Auf diese Potenz den Satz angewandt: eine Potenz wird mit einer Zahl potenziert, indem man ihren Exponenten mit derselben multipliciert, erhält man $a^{\frac{mn}{n}}$ und dies ist a^m. — Beispiele. $\sqrt{2^6} = 2^{\frac{6}{2}} = 2^3 = 8$; $\sqrt[3]{2^6} = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2 = 4$.

e) Potenzierung einer Wurzel.

Eine Wurzel wird mit einer Zahl potenziert, indem man den Radikanden mit dieser Zahl potenziert.

---

[1]) Es wird vorerst vorausgesetzt, daß der Wurzelexponent im Potenzexponenten aufgeht.

Behauptung. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.

Beweis. Dem Potenzbegriff gemäß ist $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \ldots$ m mal. Da gleichnamige Wurzeln mit einander multipliciert werden, indem man ihre Radikanden multipliciert, so erhält man für den letzteren Ausdruck den folgenden $\sqrt[n]{a \cdot a \cdot a \ldots m\,\text{mal}}$, wofür man dem Begriff der Potenz gemäß setzen kann: $\sqrt[n]{a^m}$. — Beispiele. $(\sqrt{9})^3 = \sqrt{9^3} = \sqrt{729} = 27$; $(\sqrt[6]{8})^2 = \sqrt[6]{8^2} = \sqrt[6]{64} = 2$.

f) Radicierung einer Wurzel.

1) Anstatt aus einer Wurzel nochmals die Wurzel zu ziehen, kann man auch den Radikanden durch das Produkt der Wurzelexponenten radicieren.

Behauptung. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

Beweis. Es ist $(\sqrt[mn]{a})^{m \cdot n} = a$ nach Satz a) dieses §. — Beispiele. $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$; $\sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[6]{729} = 3$.

2) Durch ein Produkt wird radiciert, indem man nach einander durch die Faktoren desselben in willkürlicher Reihenfolge radiciert.

Umkehrung von 1). $\sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$. —

Beispiel. $\sqrt[6]{64} = \sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{8} = 2$ oder $= \sqrt[2]{\sqrt[3]{64}} = \sqrt{4} = 2$.

g) Erweiterung und Kürzung der Wurzeln.

1) Der Wert einer Wurzel bleibt unverändert, wenn man Wurzel- und Radikandexponent mit ein und derselben Zahl multipliciert oder durch dieselbe Zahl dividiert.

Behauptung. $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mp]{a^{np}} = \sqrt[m:p]{a^{n:p}}$.

Beweis. $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{np}{mp}} = a^{\frac{n:p}{m:p}}$. Der Beweis kann auch in folgender Weise geführt werden: Multipliciert man den Wurzelexponenten mit der Zahl p, so wird hiedurch der ganze Ausdruck durch p radiciert, multipliciert man nun auch den Radikandexponenten mit p, so wird hiedurch der Ausdruck mit p potenziert. Der Ausdruck ist demnach unverändert geblieben, weil man ihn mit ein und derselben Zahl radiciert und potenziert hat. — Beispiel. $\sqrt{2^2} = \sqrt[4]{2^4} = \sqrt[8]{2^8}$; $\sqrt[8]{2^8} = \sqrt[4]{2^4} = \sqrt{2^2} = 2$.

2) Mit Hilfe des vorstehenden Lehrsatzes kann man zwei oder mehrere Wurzeln von ungleichen Wurzelexponenten in Wurzeln mit gleichen Exponenten verwandeln. Ist dies zu thun, so sucht man das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Wurzelexponenten, den sogenannten gemeinschaftlichen oder General-Wurzelexponenten, und multipliciert die Potenzexponenten mit denjenigen Faktoren des gemeinschaftlichen Wurzelexponenten, welche die besondern Wurzelexponenten nicht enthalten.

II. Quadrat- und Kubikwurzel aus Polynomen.

Das hiebei einzuschlagende Verfahren stimmt mit dem bei gewöhnlichen Zahlen angewandten überein. Vor der Wurzelausziehung sind die Glieder des Polynoms zu ordnen.

B. Übungsaufgaben.

a) Aufgaben mit Auflösung.

1) $\sqrt[3]{\frac{(16a^2-4b^2)(4a+2b)^2}{4a-2b}} = \sqrt[3]{\frac{(4a+2b)(4a-2b)(4a+2b)(4a+2b)}{4a-2b}}$

$= \sqrt[3]{(4a+2b)(4a+2b)(4a+2b)} = \sqrt[3]{(4a+2b)^3} = 4a + 2b.$

Erläuterung: $16a^2 - 4b^2$ läßt sich nach §. 28, Zusatz in $(4a + 2b)(4a - 2b)$ zerlegen, und statt $(4a + 2b)^2$ kann man dem Potenzbegriff gemäß setzen $(4a + 2b)(4a + 2b)$. Kürzt man nun den Radikanden, der ein Bruch ist, durch $4a - 2b$, so bleibt im Zähler $(4a + 2b)(4a + 2b)(4a + 2b)$ stehen, wofür man $(4a + 2b)^3$ setzen kann u. s. w.

2) Die folgenden Wurzeln: $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[4]{a^3}$, $\sqrt[5]{a^2}$, $\sqrt[6]{5^5}$ und $\sqrt[8]{a^7}$ sollen in andere Wurzeln von gleichem Werte verwandelt werden.

Auflösung. Da die gegebenen Wurzeln den gemeinschaftlichen Wurzelexponenten 120 haben, so ist:

$$\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3.40]{a^{2\cdot 40}} = \sqrt[120]{a^{80}}$$

$$\sqrt[4]{a^3} = \sqrt[4.30]{a^{3\cdot 30}} = \sqrt[120]{a^{90}}$$

$$\sqrt[5]{a^2} = \sqrt[5.24]{a^{2\cdot 24}} = \sqrt[120]{a^{48}}$$

$$\sqrt[6]{a^5} = \sqrt[6.20]{a^{5\cdot 20}} = \sqrt[120]{100}$$

$$\sqrt[8]{a^7} = \sqrt[8.15]{a^{7\cdot 15}} = \sqrt[120]{a^{105}}.$$

3) $\sqrt{16x^2 - 40xy + 25y^2} = \overset{a}{4x} - \overset{b}{5y}$

$a^2 = 16x^2$

$(-)$

$2a = 8x \mid -40xy + 25y^2$

$2ab + b^2 = -40xy + 25y^2$

$\quad (+) \quad (-)$

0

4) $\sqrt{\frac{9}{4} + 9x - 9x^2 - 36x^3 + 36x^4} = \frac{3}{2} + 3x - 6x^2$

$\frac{9}{4}$

$(-)$

$3 \mid 9x - 9x^2$

$\quad 9x + 9x^2$

$\quad (-) \quad (-)$

$2(\frac{3}{2} + 3x) \mid -18x^2 - 36x^3 + 36x^4$

$\quad -18x^2 - 36x^3 + 36x^4$

$\quad (-) \quad (+) \quad (-)$

0

5) $\sqrt[3]{64x^3 + 240x^2y + 300xy^2 + 125y^3} = \overset{a}{4x} \overset{+}{+} \overset{b}{5y}$

$a^3 = 64x^3$
(—)

$3a^2 = 48x^2 \mid \quad 240x^2y + 300xy^2 + 125y^3$

$3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 240x^2y + 300xy^2 + 125y^3$
(—) (—) (—)

0

6) $\sqrt[3]{8x^3+36x^2y-48x^2z+54xy^2-144xyz+96xz^2+27y^3-108y^2z+144yz^2-64z^3}=2x+3y-4z$

$8x^3$
(—)

$3a^2=12x^2 \mid 36x^2y-48x^2z+54xy^2-144xyz+96xz^2+27y^3$

$36x^2y \qquad +54xy^2 \qquad +27y^3$
(—) (—) (—)

$12x^2+36xy+27y^2 \mid -48x^2z-144xyz+96xz^2-108y^2z+144yz^2-64z^3$

$-48x^2z-144xyz \qquad -108y^2z$
(+) (+) $+96xz^2$(+) $+144yz^2-64z^3$
(—) (—) (+)

0

Also heißt die Kubikwurzel $2x + 3y - 4z$.

Erklärung. Der erste Teil der Wurzel oder a ist $2x$, mithin $3a^2 = 3 \cdot (2x)^2 = 12x^2$. Der zweite Teil der Wurzel oder b ist $3y$, mithin ist $3(a + b)^2 = 3(2x + 3y)^2 = 3(4x^2 + 12xy + 9y^2) = 12x^2 + 36xy + 27y^2$. Der dritte Teil der Wurzel oder c ist $-4z$; folglich ist $3(a + b)^2c = 3(2x + 3y)^2 \cdot -4z = 3(4x^2 + 12xy + 9y^2) \cdot -4z = -48x^2z - 144xyz - 108y^2z$. $3(a + b)c^2 = 3(2x + 3y) \cdot (-4z)^2 = 3(2x + 3y) \cdot 16z^2 = 96xz^2 + 144yz^2$. Endlich ist $c^3 = (-4z)^3 = -64z^3$.

b) Ungelöste Aufgaben.

Man vergleiche: Fuß, Aufgabensammlung §. 23.

§. 34. Rückblick auf die Gesetze des Potenzierens und Radicierens.

1) Es ist empfehlenswert, sich an dieser Stelle noch einmal im Zusammenhang zu vergegenwärtigen, welche verschiedenen Zahlformen bisher potenziert und radiciert wurden. Was zunächst die Potenzierung betrifft, so kommen bei derselben, da sowohl die Basis als der Exponent eine Summe, eine Differenz, ein Produkt, ein Quotient und eine Potenz sein kann, im allgemeinen 10 Fälle in betracht, die sich folgendermaßen bezeichnen lassen:

1) $(a + b)^n$	6) a^{m+n}
2) $(a - b)^n$	7) a^{m-n}
3) $(a \, . \, b)^n$	8) a^{mn}
4) $(a : b)^n$	9) $a^{m:n}$
5) $(a^m)^n$	10) $a^{(m^n)}$.

2) Von diesen 10 Fällen haben ihre Erledigung wirklich gefunden: 3) in §. 22, 4) in §. 23, 5) in §. 27, 6) in §. 22, 7) in §. 23 und 8) in §. 27. Es fehlen also noch die Lehrsätze für 1), 2), 9) und 10).

3) Die Resultate von $(a + b)^n$ und $(a - b)^n$ werden mit Hilfe des sogenannten binomischen Lehrsatzes entwickelt, der erst auf einer späteren Stufe des Unterrichts zu betrachten ist. Es sei hier besonders darauf aufmerksam gemacht, daß $(a + b)^n$ nicht etwa $a^n + b^n$ und $(a - b)^n$ nicht $a^n - b^n$ ist, ebensowenig wie man für $(a + b)^2$ den Ausdruck $a^2 + b^2$, oder für $(a - b)^2$ den Ausdruck $a^2 - b^2$ setzen darf. Umgekehrt kann auch nicht für $a^n + b^n$ etwa $(a + b)^n$, oder für $a^n - b^n$ $(a - b)^n$ gesetzt werden.

4) Der Fall 9 ist, wenn auch unter beschränkten Voraussetzungen, in §. 33 behandelt worden; denn wenn $\sqrt[n]{a^m} = a^{m:n}$ ist, so muß umgekehrt auch $a^{m:n} = \sqrt[n]{a^m}$ sein.

5) Fall 10) bleibt ohne Erledigung, da es keinen passenden Ausdruck gibt, der sich dafür setzen ließe.

6) Was die Radicierung betrifft, so sind hiebei, da sowohl Radikand als Wurzelexponent eine Summe, eine Differenz, ein Produkt, ein

Quotient, eine Potenz und eine Wurzel sein kann, im allgemeinen 12 Fälle zu unterscheiden. Man stelle dieselben übersichtlich zusammen und gebe an, welche von denselben behandelt wurden und welche nicht.

7) Inbezug auf die 2 Fälle $\sqrt[n]{a + b}$ und $\sqrt[n]{a - b}$ sei besonders bemerkt, daß man hiefür nicht $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ bezw $\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$ setzen kann. Hiernach ist also $\sqrt{3^2 + 4^2}$ nicht $3 + 4 = 7$, sondern $\sqrt{25} = 5$ und $\sqrt{25 - 9}$ nicht $5 - 3 = 2$, sondern $\sqrt{16} = 4$.

§. 35. Das Rechnen mit irrationalen Wurzeln.

Es handelt sich hiebei um die Formveränderungen, welche an irrationalen Wurzeln in den vier Grundrechnungsarten vorgenommen werden können, ohne daß der Wert derselben bestimmt wird. Was die Verschiedenheit zweier oder mehrerer Wurzeln inbezug auf Radikand und Exponent betrifft, so unterscheidet man zunächst gleiche und gleichnamige Wurzeln. Gleiche Wurzeln sind solche, die gleiche Wurzelexponenten und gleiche Radikanden haben. Gleichnamig heißen sie, wenn sie nur gleiche Wurzelexponenten besitzen. Außerdem gibt es noch Wurzeln, die gleiche Radikanden und verschiedene Exponenten haben und solche, die in beiden verschieden sind. Diese vier Fälle kommen im Nachfolgenden in betracht.

I. Addition und Subtraktion.

A. Lehrsätze.

Nur gleiche Wurzeln können addiert oder subtrahiert werden; die Addition oder Subtraktion der drei andern Arten von Wurzeln kann man nur andeuten. Sind gleiche Wurzeln zu addieren, oder zu subtrahieren, so addiert oder subtrahiert man deren Koefficienten.

Beweis. Die Richtigkeit der vorstehenden Sätze folgt aus dem unter e) und f) des §. 11 Gesagten. Hiernach ist $4\sqrt{7} + 2\sqrt{7} = \sqrt{7} + \sqrt{7} + \sqrt{7} + \sqrt{7} + \sqrt{7} + \sqrt{7} = 6\sqrt{7}$.

B. Übungsaufgaben.

a) Aufgaben mit Auflösung.

1) $5\sqrt[3]{a} + 8\sqrt[3]{a} + 3\sqrt[3]{a} + 13\sqrt[3]{a} = 29\sqrt[3]{a}.$

2) $17\sqrt[m]{13} + 6\sqrt[n]{7} - 15\sqrt[m]{13} - 8\sqrt[n]{7} = 2\sqrt[m]{13} - 2\sqrt[n]{7}.$

b) Ungelöste Aufgaben.

Man vergleiche: Fuß, Aufgabensammlung §. 24 I.

II. Vereinfachungen und Verwandlungen irrationaler Wurzeln.

A. Erklärungen und Lehrsätze.

1) Läßt sich der Radikand einer Wurzel so in zwei oder mehrere Faktoren zerlegen, daß die betreffende Wurzel aus einzelnen derselben aufgeht, so kann man die letzteren radicieren und das erhaltene Resultat als Koefficient vor das Wurzelzeichen setzen. Durch dieses Verfahren kann man häufig bei Additionen und Subtraktionen bedeutende Abkürzungen bewirken. Der Beweis folgt aus Satz b) des §. 33. Beispiele: $\sqrt{24} + \sqrt{54} - \sqrt{96} = \sqrt{4 \,.\, 6} + \sqrt{9 \,.\, 6} - \sqrt{16 \,.\, 6} = 2\sqrt{6} + 3\sqrt{6} - 4\sqrt{6} = 1\sqrt{6} = \sqrt{6},$ oder
$\sqrt{12} + 2\sqrt{27} + 3\sqrt{75} - 9\sqrt{48} = \sqrt{4 \,.\, 3} + 2\sqrt{9 \,.\, 3} + 3\sqrt{25 \,.\, 3} - 9\sqrt{16 \,.\, 3} = 2\sqrt{3} + 6\sqrt{3} + 15\sqrt{3} - 36\sqrt{3} = -13\sqrt{3}.$

2) Ein vor einer Wurzel stehender Koefficient kann als Faktor unter das Wurzelzeichen gebracht werden, wenn man ihn vorher auf den Grad des Wurzelexponenten potenziert. Der Beweis ist in Satz b) des §. 33 enthalten. Beispiele: $2\sqrt{6} = \sqrt{2^2 \,.\, 6} = \sqrt{4 \,.\, 6} = \sqrt{24},$ oder $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n\, b}.$

3) Nenner, welche innerhalb einer Wurzel stehen, kann man vor dieselbe bringen und umgekehrt. Bei-

spiele: $\sqrt{\frac{a}{b^2}} = \frac{1}{b}\sqrt{a}$; $\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{ab}{b^2}} = \frac{1}{b}\sqrt{ab}$;

$\frac{1}{4}\sqrt{5} = \sqrt{\frac{5}{4^2}} = \sqrt{\frac{5}{16}}$.

B. Übungsaufgaben.

a) Aufgaben mit Auflösung.

1) $3\sqrt{20} + 4\sqrt{8} - 2\sqrt{45} + \sqrt{18} - 5\sqrt{80} + 6\sqrt{32} + 3\sqrt{125} - \sqrt{72} + \sqrt{50} = 3\sqrt{4 \cdot 5} + 4\sqrt{4 \cdot 2} - 2\sqrt{9 \cdot 5} + \sqrt{9 \cdot 2} - 5\sqrt{16 \cdot 5} + 6\sqrt{16 \cdot 2} + 3\sqrt{25 \cdot 5} - \sqrt{36 \cdot 2} + \sqrt{25 \cdot 2} = 6\sqrt{5} + 8\sqrt{2} - 6\sqrt{5} + 3\sqrt{2} - 20\sqrt{5} + 24\sqrt{2} + 15\sqrt{5} - 6\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = -5\sqrt{5} + 34\sqrt{2} = 34\sqrt{2} - 5\sqrt{5}$.

2) $\sqrt{12c^3} + \sqrt{27c^3} - \sqrt{48c^3} = \sqrt{4c^2 \cdot 3c} + \sqrt{9c^2 \cdot 3c} - \sqrt{16c^2 \cdot 3c} = 2c\sqrt{3c} + 3c\sqrt{3c} - 4c\sqrt{3c} = c\sqrt{3c}$.

3) $\frac{a-x}{a+x}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = \sqrt{\frac{(a-x)^2(a+x)}{(a+x)^2 \cdot (a-x)}} = \sqrt{\frac{(a-x)(a-x)(a+x)}{(a+x)(a+x)(a-x)}} = \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$

4) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{8^{24}}}} - \sqrt{\sqrt{\sqrt[5]{6^{20}}}} + \sqrt{\sqrt[5]{\sqrt[6]{5^{60}}}} = 7.$

b) Ungelöste Aufgaben.

Man vergleiche: Fuß, Aufgabensammlung, §. 24, II.

III. Multiplikation irrationaler Wurzeln.

A. Erklärungen und Lehrsätze.

1) Haben die zu multiplicierenden Wurzeln gleiche Wurzelexponenten, so multipliciert man die Radikanden miteinander, und gibt dem Produkt derselben das gemeinschaftliche Wurzelzeichen. Beweis in Satz b) des §. 33. Beispiele: $\sqrt{5} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{35}$; $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

2) Haben die zu multiplicierenden Wurzeln verschiedene Exponenten, so bringt man sie auf Wurzeln mit gleichen Exponenten. Man vergleiche Satz g) in §. 33.

Beispiel: $\sqrt[3]{2} \,.\, \sqrt{3} = \sqrt[6]{2^2} \,.\, \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{2^2 \,.\, 3^3} = \sqrt[6]{4 \,.\, 27}$
$= \sqrt[6]{108}.$

3) Die Multiplikation eines Polynoms, dessen Glieder Wurzeln sind, mit einem Monom oder einem Polynom geschieht nach Gesetz f) und g) des §. 13 unter Beachtung der vorstehenden Regeln.

B. Übungsaufgaben.

a) Aufgaben mit Auflösung.

1) $\sqrt{a} \,.\, \sqrt[3]{b} \,.\, \sqrt[4]{c} \,.\, \sqrt[5]{d} \,.\, \sqrt[6]{e} \,.\, \sqrt[10]{f} = \sqrt[60]{a^{30}} \,.\, \sqrt[60]{b^{20}} \,.$
$\sqrt[60]{c^{15}} \,.\, \sqrt[60]{d^{12}} \,.\, \sqrt[60]{e^{10}} \,.\, \sqrt[60]{f^6} = \sqrt[60]{a^{30}b^{20}c^{15}d^{12}e^{10}f^6}.$

2) $(8\sqrt{12} + 2)(6\sqrt{12} + 7) =$

$$\begin{array}{r} 48 \,.\, 12 + 12\sqrt{12} \\ + 56\sqrt{12} + 14 \\ \hline 576 + 68\sqrt{12} + 14 = \\ 590 + 68\sqrt{12} = \\ 590 + 136\sqrt{3}. \end{array}$$

3) $\sqrt[3]{\sqrt{31} - 2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{31} + 2} + \sqrt[3]{9 + \sqrt{17}} \cdot \sqrt[3]{9 - \sqrt{17}} =$

$$\sqrt[3]{31 - 4} + \sqrt[3]{81 - 17} =$$
$$\sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{64} =$$
$$3 + 4 =$$
$$7$$

b) Ungelöste Aufgaben.

S. Fuß, Sammlung von Aufgaben, §. 24, III.

IV. Division irrationaler Wurzeln.

A. Erklärungen und Lehrsätze.

1) Haben die Wurzeln, welche durch einander dividiert werden sollen, den gleichen Wurzelexponenten, so dividiert man die Radikanden durch einander und radiciert den erhaltenen Quotienten durch den gemeinschaftlichen Wurzelexponenten. Der Beweis ist in Satz c) des §. 33 enthalten. Beispiele:

$$\sqrt[3]{15} : \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{15 : 5} = \sqrt[3]{3}; \; \sqrt[3]{5} : \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5 : 5} = \sqrt[3]{1}.$$

2) Haben die Wurzeln, welche durch einander dividiert werden sollen, verschiedene Wurzelexponenten, so verwandelt man sie in Wurzeln mit gleichen Exponenten und verfährt dann nach 1). Vergleiche Satz g) des §. 33. Beispiel:

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt[6]{5^2}}{\sqrt[6]{5^3}} = \sqrt[6]{\frac{5^2}{5^3}} = \sqrt[6]{\frac{1}{5}}, \text{ oder } \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt[6]{4^2}}{\sqrt[6]{3^3}} = \sqrt[6]{\frac{4^2}{3^3}}$$

$$= \sqrt[6]{\frac{16}{27}}.$$

3) Sind algebraische Summen, deren Glieder irrationale Wurzeln sind, zu dividieren, so wird die Division nach den für die algebraischen Summen entwickelten Gesetzen unter Beachtung vorstehender Regeln ausgeführt.

4) Sollen irrationale Wurzeln durch einander dividiert werden, so pflegt man gewöhnlich den Dividendus und den Divisor mit einem solchen Wurzelausdruck zu multiplicieren, daß hiedurch das Wurzelzeichen im Nenner verschwindet. Man nennt dieses Verfahren das Rationalmachen des Nenners. Hiebei sind mehrere Fälle zu unterscheiden:

a) Ist der Divisor eine monomische Quadratwurzel so multipliciert man Divisor und Dividendus mit der im Divisor stehenden Wurzel. Beispiel:

$$\frac{3\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{(3\sqrt{2} + \sqrt{3})\sqrt{3}}{\sqrt{3} \,.\, \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{6} + 3}{3} = \sqrt{6} + 1.$$

b) Wenn der Nenner die Summe oder Differenz zweier Quadratwurzeln ist, so macht man ihn nach der Formel $(a + b) . (a - b) = a^2 - b^2$ rational. Ist also der Nenner eine Summe, so muß man Zähler und Nenner mit der Differenz der Summanden multiplicieren, und mit der Summe derselben, wenn der Nenner eine Differenz ist. Beispiel:

$$\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})} = \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{5-2} =$$

$$\frac{2}{3}(\sqrt{5}-\sqrt{2}).$$

c) Bei drei- oder viergliedrigem Divisor muß man derartige Multiplikationen wiederholen.

B. Übungsaufgaben.

a) Aufgaben mit Auflösung.

1) $$\sqrt[8]{\frac{m^{15}n^2p^4}{q^7r^4}} : \sqrt[8]{\frac{m^7p^4q}{n^6r^4}} = \sqrt[8]{\frac{m^{15}n^2p^4}{q^7r^4}} \cdot \sqrt[8]{\frac{n^6r^4}{m^7p^4q}} =$$

$$\sqrt[8]{\frac{m^8n^8}{q^8}} = \frac{mn}{q}.$$

2) $$\sqrt[3]{x^2yz} : \sqrt[5]{xy^2z^3} = \frac{\sqrt[15]{(x^2yz)^5}}{\sqrt[15]{(xy^2z^3)^3}} = \frac{\sqrt[15]{x^{10}y^5z^5}}{\sqrt[15]{x^3y^6z^9}} =$$

$$\sqrt[15]{\frac{x^{10}y^5z^5}{x^3y^6z^9}} = \sqrt[15]{\frac{x^7}{yz^4}}.$$

3) $$\sqrt{x^2 - y^2} : (x-y) = \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{(x-y)^2}} = \sqrt{\frac{(x+y)(x-y)}{(x-y)(x-y)}}$$

$$= \sqrt{\frac{x+y}{x-y}}.$$

4) $\frac{1 + 2\sqrt{3}}{5 - \sqrt{3}} = \frac{(1 + 2\sqrt{3})(5 + \sqrt{3})}{(5 - \sqrt{3})(5 + \sqrt{3})} = \frac{5 + \sqrt{3} + 10\sqrt{3} + 6}{25 - 3}$

$= \frac{11 + 11\sqrt{3}}{22} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}.$

b) Ungelöste Aufgaben.

Man vergleiche: Fuß, Aufgabensammlung, §. 24 IV, und §. 31 III, §. 33c, §. 35 und §. 36.

§. 36. Potenzen mit gebrochenen Exponenten.

A. Erklärungen und Lehrsätze.

a) Bedeutung einer Potenz mit gebrochenem Exponenten.

In den früheren Sätzen der Potenzlehre (II. Abschnitt) kamen nur Potenzen in betracht, deren Exponenten ganze Zahlen waren. Sollen jene Sätze nun auch auf Potenzen mit gebrochenen Exponenten ausgedehnt werden, so muß man den Potenzbegriff vorerst erweitern. Nach Satz d) des §. 33 entsteht eine Potenz mit gebrochenem Exponenten, wenn eine Potenz radiciert wird, wobei der Wurzelexponent kein Faktor des Potenzexponenten ist. Demgemäß drückt eine Potenz mit gebrochenem Exponenten aus, daß man zuerst die Basis derselben mit dem Zähler des Bruchexponenten potenzieren und diese Potenz durch den Nenner radicieren soll, oder mit anderen Worten: eine solche Potenz drückt eine Wurzel vom Grade des Nenners aus einer Potenz vom Grade des Zählers des Exponenten aus: also:

$$a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2};\; a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}.$$

b) Das Rechnen mit Bruchpotenzen.

Alle bisher für das Rechnen mit Potenzen entwickelten Gesetze haben auch volle Gültigkeit für Potenzen mit gebrochenen Exponenten.

Beweis. Der Beweis des vorstehenden Satzes besteht darin, daß man den gebrochenen Potenzen die Wurzelform gibt, darauf die Formeln der Wurzelrechnung anwendet und die erhaltenen Ausdrücke auf die Potenzform zurückführt; z. B.

1) $(ab)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(ab)^m} = \sqrt[n]{a^m b^m} = \sqrt[n]{a^m}\,.\,\sqrt[n]{b^m} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}}$.

2) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$.

3) $a^{\frac{m}{n}}\,.\,a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m}\,.\,\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}}\,.\,\sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}}$
$= a^{\frac{mq+np}{nq}}$.

Ähnlich sind die übrigen Beweise.

B. **Übungsaufgaben.**

a) Aufgaben mit Auflösung.

1) $a^{\frac{3}{4}}\,.\,a^{\frac{1}{2}}\,.\,a^{-\frac{1}{5}} = a^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}} = a^{\frac{15+10-4}{20}} = a^{\frac{21}{20}} = \sqrt[20]{a^{21}} = a\sqrt[20]{a}$.

2) $\frac{a}{b^{\frac{3}{4}}c^{\frac{1}{2}}}\,.\,\frac{a^{\frac{5}{4}}b}{c^{-\frac{1}{4}}} = \frac{a^{\frac{9}{4}}b}{b^{\frac{3}{4}}c^{\frac{1}{4}}} = \frac{a^{\frac{9}{4}}b^{\frac{1}{4}}}{c^{\frac{1}{4}}}$.

3) $(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}) = a^{\frac{7}{6}} - a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{7}{6}} =$
$a\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{a^4b^3} + \sqrt[6]{a^3b^4} - b\sqrt[6]{b}$.

4) $10a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{2}{3}} : 2a^{-\frac{3}{2}}b = 5a^3b^{-\frac{1}{3}}$.

b) Ungelöste Aufgaben.

Man vergleiche: Fuß, Aufgabensammlung § 25.

§. 37. **Die imaginären Zahlen.**

a) Begriff der imaginären Zahlen.

$\sqrt{25} = \pm 5$; denn sowohl $(+5)^2$, als $(-5)^2$ gibt 25. Aus -25 dagegen kann die Quadratwurzel weder $(+5)$, noch (-5) sein, da keiner dieser Werte, zweimal als Faktor gesetzt, -25 gibt. $\sqrt[3]{-27} = -3$; denn $(-3)^3 = -27$. Die 4. Wurzel aus -81 ist weder $(+3)$, noch (-3), weil $(\pm 3)^4 = 81$ gibt. $\sqrt[5]{-32} = -2$; denn $(-2)^5 = -32$. $\sqrt[6]{-64} = ?$ Aus diesen Beispielen folgern wir:

Jede gerade Wurzel einer negativen Zahl ist weder positiv noch negativ; sie kann daher nicht ausgezogen, sondern nur angedeutet werden. Aus diesem Grunde nennt man jeden Wurzelausdruck, dessen Radikand negativ und dessen Wurzelexponent gerade ist, eine imaginäre (eingebildete) Zahl. Die Ausdrücke $\sqrt{-16}$, $\sqrt{-25}$, $\sqrt{-7}$ sind also imaginäre Zahlen. Im Gegensatz zu ihnen nennt man die ganzen, gebrochenen und irrationalen Zahlen, sowohl positive als negative, reelle oder wirkliche Zahlen. $\sqrt[2n]{-a}$ ist die allgemeine Form eines imaginären Ausdrucks und $\sqrt{-1}$, gewöhnlich durch i bezeichnet, die imaginäre Einheit. Ein Binom von der Form $a + ib$, worin a und b reelle Zahlen sind, i die imaginäre Einheit, heißt eine komplexe Zahl.

b) Die wichtigsten Sätze über das Rechnen mit imaginären Ausdrücken.

Jede Quadratwurzel aus einer negativen Zahl läßt sich als das Produkt einer reellen Zahl und der imaginären Einheit ausdrücken; z. B. $\sqrt{-16} = \sqrt{16 \,.\, (-1)} = \sqrt{16} \,.\, \sqrt{-1} = \pm 4 \,.\, i$, oder $\sqrt{-a} = \sqrt{a \,.\, (-1)} = \sqrt{a} \,.\, \sqrt{-1} = \pm \sqrt{a} \,.\, i$.

2) Das Quadrat einer imaginären Quadratwurzel ist der negative Radikand.

Beweis folgt aus dem Begriff der Wurzel; also $(\sqrt{-1})^2 = -1$, $(\sqrt{-a})^2 = -a$.

3) Das Produkt aus einer reellen und imaginären Quadratwurzel ist imaginär.

Beweis. $\sqrt{a} \,.\, \sqrt{-b} = \sqrt{a} \,.\, \sqrt{b} \,.\, \sqrt{-1} = \sqrt{ab} \,.\, \sqrt{-1} = \sqrt{-ab}$.

4) Das Produkt zweier imaginärer Quadratwurzeln ist reell, aber negativ.

Beweis. $\sqrt{-a} \,.\, \sqrt{-b} = \sqrt{a} \,.\, \sqrt{b} \,.\, (\sqrt{-1})^2 = \sqrt{ab} \,.\, -1 = -\sqrt{ab}$.

5) Der Quotient aus einer reellen und imaginären Quadratwurzel ist imaginär.

Beweis. $\sqrt{a} : \sqrt{-b} = \sqrt{a} : i\sqrt{b} = i\sqrt{a : b}$.

6) Der Quotient aus zwei imaginären Quadratwurzeln ist reell.

Beweis. $\sqrt{-a} : \sqrt{-b} = i\sqrt{a} : i\sqrt{b} = \sqrt{a : b}$.

Rückblick auf die Verschiedenheit der Zahlen.

Der Begriff Zahl erfährt, wie wir bisher wahrgenommen haben, in der Mathematik eine fortschreitende Entwicklung. Die Reihe der natürlichen oder absoluten (positiven) ganzen Zahlen wurde zunächst durch die Reihe der negativen Zahlen, zu welchen die Subtraktion führte, erweitert. Bei der Division gelangten wir sodann zum Begriff der gebrochenen Zahlen. Aus dem Wurzelausziehen endlich entwickelten sich die Begriffe der irrationalen, imaginären und komplexen Zahlen. Das folgende Schema bringt diese Einteilung zur Übersicht:

+ Zahlen —

Reelle Z. Imaginäre Z. Komplexe Z.

Rationale Z. Irrationale Z.

Ganze Z. gebr. Z.

Vierter Abschnitt.

Von den Reduktionen.

§. 38. Die Reduktionen im allgemeinen.

Unter dem Wort Reduktion versteht man in der allgemeinen Arithmetik die Zurückführung eines algebraischen Ausdrucks auf die einfachste oder kürzeste Form, deren er fähig ist. Um solche Reduktionen auszuführen, hat man entweder Brüche zu addieren, also Polynome in Monome zu verwandeln, oder algebraische Summen in Faktoren zu zerlegen und, falls dieselben in Bruchform auftreten, zu kürzen. Von beiden Mitteln der Reduktion war schon in §. 16 und §. 17 die Rede. Hier soll eingehender von denselben gehandelt werden.

§. 39. Addition und Subtraktion von Brüchen.

A. Erklärungen.

Die hieher gehörigen Aufgaben lassen sich nach Graden der Leichtigkeit also ordnen:

a) Zähler und Nenner der zu addierenden Brüche sind Monome.

$$1)\ \frac{5}{3a} - \frac{7c}{5ab} + 8b = \frac{25b - 21c + 120ab^2}{15ab}.$$

Denk- und Sprechweise: Der Generalnenner (das kleinste gemeinschaftliche Vielfache) ist 15ab. Jedes dieser drei Glieder erhält nun den Nenner 15ab. Gibt man dem ersten Ausdruck, der den Nenner 3a hat, den Nenner 15ab, so multipliciert man damit den Nenner desselben mit 5b; deshalb muß auch der Zähler dieses Bruches, damit sein Wert unverändert bleibt, mit 5b multipliciert werden. Der erste Bruch heißt also jetzt 25b : 15ab. In ähnlicher Weise ist beim zweiten und dritten Ausdruck zu denken und zu sprechen. Dem dritten Ausdruck gibt man den Nenner 1. Die 3 erweiterten Aus-

drücke heißen also $25b : 15ab$, $-21c : 15ab$ und $120ab^2 : 15ab$. Da gleichnamige Brüche addiert werden, indem man ihre Zähler addiert, so kann man der Kürze wegen sofort die Summe der Zähler bilden und ihr den gemeinschaftlichen Nenner geben.

2) $$\frac{3ab}{cd} + \frac{4ac}{3bd} - \frac{5ad}{2bc} + \frac{6bc}{5ad} - \frac{3bd}{2ac} - \frac{4cd}{ab} =$$
$$\frac{90a^2b^2 + 40a^2c^2 - 75a^2d^2 + 36b^2c^2 - 45b^2d^2 - 120c^2d^2}{30abcd}.$$

b) Die Zähler der zu addierenden Brüche sind algebraische Summen, die Nenner Monome.

3) $$\frac{2a + 3b}{5} - \frac{4a - 7b}{3} + \frac{6a + 3b}{4} - \frac{7a + 9b}{6} = ?$$

Sämtliche Ausdrücke gleichnamig gemacht, erhält man:

$$\frac{24a + 36b - 80a + 140b + 90a + 45b - 70a - 90b}{60}$$

Die gleichn. Gl. addiert: $\dfrac{-36a + 131b}{60}$ oder $\dfrac{131b - 36a}{60}$.

Denk- und Sprechweise: Der Generalnenner ist 60. Gibt man dem ersten Bruch den Nenner 60, so multipliciert man damit den Nenner desselben mit 12; mithin muß auch der Zähler $(2a + 3b)$ dieses Bruches, damit sein Wert nicht verändert wird, mit 12 multipliciert werden; das 12fache von $2a + 3b$ ist $24a + 36b$. Erhält der zweite Ausdruck den Nenner 60, so wird sein Nenner 3 auf diese Weise mit 20 multipliciert. Deshalb muß man auch seinen Zähler mit 20 multiplicieren. Das 20fache von $4a - 7b$ ist $80a - 140b$. Dieser Ausdruck soll aber subtrahiert werden. Statt $(80a - 140b)$ zu subtrahieren, kann man das Entgegengesetzte davon, nämlich $-80a + 140b$ addieren u. s. w. — Man lasse nie außer acht, daß der Divisionsstrich den Dividendus als einen unzertrennlichen, zusammengehörigen Zahlenausdruck bezeichnet und daß daher beim Wegfallen desselben, falls vor ihm ein — steht, entweder eine Klammer gesetzt werden muß, oder die Vorzeichen sämtlicher Glieder des Dividendus in die entgegengesetzten zu verwandeln sind.

4) $$\frac{f + g}{3h} - \frac{f - g}{4h} + \frac{g + 2f}{2h} - \frac{2g - f}{3h} =$$
$$\frac{4f + 4g - 3f + 3g + 6g + 12f - 8g + 4f}{12h} =$$
$$\frac{17f + 5g}{12h}.$$

c) Unter den Nennern der zu addierenden Brüche kommen algebraische Summen vor.

$$5)\ \frac{4a - 3b}{2a - b} - \frac{5a + 7b}{3a + 2b} = ?$$

Die Brüche gleichnamig gemacht, erhält man:

$$\frac{(4a - 3b)(3a + 2b) - (5a + 7b)(2a - b)}{(2a - b)(3a + 2b)}$$

Die Kl. aufgelöst, resultiert:

$$\frac{12a^2 + 8ab - 9ab - 6b^2 - 10a^2 + 5ab - 14ab + 7b^2}{(2a - b)(3a + 2b)}$$

Die gleichnamigen Glieder vereinigt, ergibt sich:

$$\frac{2a^2 - 10ab + b^2}{(2a - b)(3a + 2b)}.$$

$$6)\ \frac{4a - 3b}{2a - b} - \frac{2a + b}{3a - 2b} - \frac{5a}{3b} = ?$$

Bringt man sämtliche Brüche auf den Generalnenner, so ergibt sich:

$$\frac{3b\,.\,(4a - 3b)(3a - 2b) - 3b(2a + b)(2a - b) - 5a\,.\,(2a - b)(3a - 2b)}{3b\,.\,(2a - b)\,.\,(3a - 2b)}$$

Werden nun die Klammern gelöst und die gleichnamigen Glieder zusammengefaßt, so folgt:

$$\frac{59a^2b - 61ab^2 + 21b^3 - 30a^3}{3b\,.\,(2a - b)\,.\,(3a - 2b)}$$

Geordnet erhält man: $\frac{-30a^3 + 59a^2b - 61ab^2 + 21b^3}{3b\,.\,(2a - b)(3a - 2b)}$.

Hilfsrechnungen: 1) $(4a - 3b)(3a - 2b) = 12a^2 - 8ab$

$$\begin{array}{r} - 9ab + 6b^2 \\ \hline 12a^2 - 17ab + 6b^2 \\ 3b \\ \hline 36a^2b - 51ab^2 + 18b^3 \end{array}$$

2) $(2a + b)(2a - b) = 4a^2 - 2ab$

$$\begin{array}{r} + 2ab - b^2 \\ \hline 4a^2 - b^2 \\ 3b \\ \hline 12a^2b - 3b^3 \end{array}$$

3) $(2a - b)(3a - 2b) = 6a^2 - 4ab$
$ - 3ab + 2b^2$

$$6a^2 - 7ab + 2b^2$$
$$5a$$
$$30a^3 - 35a^2b + 10ab^2$$

B. Übungsaufgaben.

Man vergleiche Fuß, Aufgabensammlung §. 27.

§. 40. Verwandlung algebraischer Summen in Produkte.

A. Erklärungen.

Die Verwandlung eines Polynoms in ein Produkt besteht darin, daß man die Faktoren aufsucht und in Form eines Produkts mit einander verbindet, durch deren Multiplikation das betreffende Polynom entstanden ist. Man nennt diese Operation auch die Zerlegung algebraischer Summen in Faktoren. Je nach der Beschaffenheit der einzelnen Glieder des Polynoms kann die Faktorenzerlegung auf verschiedenen Wegen erreicht werden.

a) Sämtliche Glieder des Polynoms haben einen oder mehrere Faktoren gemein.

In diesem Fall scheidet man die Anzahl der gemeinschaftlichen Faktoren aus, d. h. man setzt sie neben eine Klammer, in welche die Summe der nicht gemeinsamen Faktoren geschrieben wird. (Umkehrung der Multiplikation eines Polynoms mit einem Monom).

1) $3ax - 4bx + 5cx - 9dx + 11ex - 13fx =$
$x(3a - 4b + 5c - 9d + 11e - 13f).$

Erläuterung Sämtliche Glieder des vorliegenden Polynoms haben den Faktor x gemein. Die in der Klammer stehenden Ausdrücke bilden die Summe der nichtgemeinschaftlichen Faktoren. Durch Multiplikation der in Parenthese stehenden Summe mit dem davor stehenden Faktor x erhält man das gegebene Polynom wieder.

2) $28abcx - 35cdgx + 56cmnx =$
$7cx(4ab - 5dg + 8mn).$

3) $72abcxyz + 63defxyz - 99gxyz =$
$9xyz(8abc + 7def - 11g).$

Zusatz. $a - b = a\left(1 - \frac{b}{a}\right)$. Dieses Beispiel zeigt, daß

man eine Summe auch dann in ein Produkt verwandeln kann, wenn die Glieder keinen Faktor gemein haben.

b) Nur einzelne Glieder des Polynoms haben Faktoren gemein.

In diesem Fall trennt man ebenfalls die gemeinschaftlichen Faktoren heraus. Häufig erhält man dann ein neues Polynom, dessen Glieder gemeinschaftliche Faktoren haben, durch deren Heraussetzung die Verwandlung des gegebenen Polynoms in ein Produkt ermöglicht wird.

$$1)\ 3ac + 3ad - 5bc - 5bd =$$
$$3a(c + d) - 5b(c + d) =$$
$$(c + d)(3a - 5b).$$

Erläuterung. Das erste und zweite Glied des gegebenen Polynoms besitzen den gemeinschaftlichen Faktor 3a, und dem dritten und vierten Glied ist der Faktor 5b gemein. Setzt man diese gemeinschaftlichen Faktoren heraus, so erhält man $3a(c + d) - 5b(c + d)$. Die Glieder dieser Summe haben nun, wie ersichtlich, den Faktor $(c + d)$ gemein. Durch Heraussetzung desselben ergibt sich das Produkt $(c + d)(3a - 5b)$. Dem Glied 5b hätte man auch das Vorzeichen + geben können, da $-5bc - 5bd$ auch durch Multiplikation von 5b mit $(-c - d)$ entstanden sein könnte, allein dann wäre der Faktor $(-c - d)$ mit dem ersten Faktor $(c + d)$ in den Vorzeichen nicht übereinstimmend und ihm darum nicht gleich. — Um eine vorgenommene Zerfällung auf ihre Richtigkeit zu prüfen, multipliciert man die erhaltenen Faktoren mit einander. Sie ist richtig, falls die ursprüngliche Summe aus der Multiplikation resultiert.

$$2)\ 16c^2 - 36cd - 40cg - 28cf + 63df + 70fg =$$
$$4c(4c - 9d - 10g) - 7f(4c - 9d - 10g) =$$
$$(4c - 9d - 10g)(4c - 7f).$$

$$3)\ 5ad + 15bd + 20cd + 7ae + 21be + 28ce =$$
$$5d(a + 3b + 4c) + 7e(a + 3b + 4c) =$$
$$(a + 3b + 4c)(5d + 7e).$$

c) Die Anzahl der Glieder des gegebenen Polynoms ist ungerade.

Ist die Anzahl der Glieder des gegebenen Polynoms eine ungerade, so suche man ein Glied so in eine Summe oder Differenz zu verwandeln, daß hiedurch eine gerade Anzahl von Gliedern (nur bei dieser ist das Verfahren unter II) möglich) entsteht. Selbstver-

ständlich muß die Zerlegung eine solche sein, daß sich gemeinschaftliche Faktoren ausscheiden lassen.

$$1)\ 10g^2 + 23gh + 12h^2 =$$
$$10g^2 + 15gh + 8gh + 12h^2 =$$
$$5g(2g + 3h) + 4h(2g + 3h) =$$
$$(2g + 3h)(5g + 4h).$$

Erläuterung: Das Glied $23gh = 15gh + 8gh$. Setzt man nun für dieses Glied die hier stehende Summe $15gh + 8gh$, so erhält man statt $10g^2 + 23gh + 12h^2$ den Ausdruck $10g^2 + 15gh + 8gh + 12h^2$. Hiedurch ist die Auflösung auf den II. Fall zurückgeführt.

$$2)\ 6b^4 + 8b^2c - 8c^2 =$$
$$6b^4 + 12b^2c - 4b^2c - 8c^2 =$$
$$6b^2(b^2 + 2c) - 4c(b^2 + 2c) =$$
$$(b^2 + 2c)(6b^2 - 4c) =$$
$$(b^2 + 2c)(3b^2 - 2c)2.$$

Anmerkung. Die umsichtige Benützung nachfolgender Formeln leistet bei auszuführenden Reduktionen wesentliche Dienste.

1) $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 = (a + b)(a + b)$,
2) $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 = (a - b) . (a - b)$,
3) $n^2 - 2n + 1 = (n - 1)^2 = (n - 1)(n - 1)$,
4) $a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2 = (a + b + c)(a + b + c)$,
5) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b)$,
6) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3 = (a - b)(a - b)(a - b)$,
7) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$,
8) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$,
9) $a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$,
10) $a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$,
11) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$,
12) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$,
13) $a^4 - b^4 = (a + b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)$,
14) $a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$.

Die Formeln 7) bis 10) werden erhalten, indem man die Ausdrücke $a^2 - b^2$, $a^3 - b^3$ u. s. w. durch die Differenz $a - b$ dividiert; dividiert man mit der Summe $(a + b)$ in die Ausdrücke $a^2 - b^2$, $a^3 + b^3$ u. s. w., so resultieren die Formeln 11) bis 14), z. B.

$$
\begin{array}{l}
a - b \mid a^3 - b^3 = a^2 + ab + b^2 \\
\quad a^3 - a^2b \\
\quad (-) \quad (+) \\
\hline
\quad\quad a^2b - b^3 \\
\quad\quad a^2b - ab^2 \\
\quad\quad (-) \quad (+) \\
\hline
\quad\quad\quad ab^2 - b^3 \\
\quad\quad\quad ab^2 - b^3 \\
\quad\quad\quad (-) \quad (+) \\
\hline
\quad\quad\quad\quad 0
\end{array}
$$

B. **Übungsaufgaben.**

Man vergleiche: Fuß, Aufgabensammlung §. 28.

§. 41. Kürzen von Brüchen.

A. **Erklärungen.**

Mit Hilfe der im vorigen § besprochenen Zerfällung algebraischer Summen in Produkte kann man sehr häufig Buchstabenausdrücke in Bruchform vereinfachen, reducieren. Dies Heben oder Kürzen ist jedoch nur dann möglich, wenn sich in allen Gliedern, sowohl in denen des Zählers, als in denen des Nenners ein gemeinschaftlicher Faktor vorfindet. Bei diesen Übungen ist große Aufmerksamkeit nötig, da leicht Fehler hiebei gemacht werden können.

B. **Übungsaufgaben.**

a) Aufgaben mit Auflösung.

1) $$\frac{3ax - 4bx + 5cx}{2fx + 8gx - 9hx} = \frac{x(3a - 4b + 5c)}{x(2f + 8g - 9h)} = \frac{3a - 4b + 5c}{2f + 8g - 9h}.$$

2) $$\frac{3a^2x + 6ax^2 + 3x^3 - 2a^2y - 4axy - 2x^2y + a^2m + 2amx + mx^2}{3a^2x - 2a^2y + a^2m - 3x^3 + 2x^2y - mx^2} =$$

$$\frac{3x(a^2 + 2ax + x^2) - 2y(a^2 + 2ax + x^2) + m(a^2 + 2ax + x^2)}{a^2(3x - 2y + m) - x^2(3x - 2y + m)} =$$

$$\frac{(a^2 + 2ax + x^2)(3x - 2y + m)}{(a^2 - x^2)(3x - 2y + m)} =$$

$$\frac{a^2 + 2ax + x^2}{a^2 - x^2} =$$

$$\frac{(a + x)(a + x)}{(a + x)(a - x)} =$$

$$\frac{a + x}{a - x}.$$

3) $\frac{n^3 - 2n^2}{n^2 - 4n + 4} =$

$\frac{n^2(n - 2)}{(n - 2)(n - 2)} =$

$\frac{n^2}{n - 2}.$

4) $\frac{a^2x - ax^2}{x^2 - a^2} =$

$\frac{ax\,.\,(a - x)}{(x + a)\,.\,(x - a)} =$

$\frac{-ax\,.\,(x - a)}{(x + a)\,.\,(x - a)} =$

$\frac{-ax}{x + a} =$

$\frac{-ax}{a + x}.$

5) $\frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc}{a^2 - b^2 - c^2 - 2bc} =$

$\frac{(a + b + c)^2}{a^2 - (b^2 + 2bc + c^2)} =$

$\frac{(a + b + c)\,.\,(a + b + c)}{a^2 - (b + c)^2} =$

$\frac{(a + b + c)\,.\,(a + b + c)}{(a + b + c)\,.\,(a - b - c)} =$

$\frac{a + b + c}{a - b - c}.$

b) Ungelöste Aufgaben.

Man vergleiche: Fuß, Aufgabensammlung §. 29.

§. 42. Vermischte Reduktionen.

Übungsaufgaben.

a) Aufgaben mit Auflösung.

1) $\frac{10ab - 5b}{3a^2 - 27} : \frac{20a^2b - 20ab + 5b}{a^2 - 3a} =$

$\frac{5b(2a - 1)}{3(a + 3)(a - 3)} \cdot \frac{a(a - 3)}{5b(2a - 1)(2a - 1)} =$

$\frac{a}{3(a + 3)(2a - 1)}.$

2) $\frac{5(2a + 5b)}{25a^2 - 4b^2} - \frac{b(342a - b)}{(5a + 2b)(5a - 2b)(2a - 5b)} + \frac{a + 64b}{(5a - 2b)(2a - 5b)} = ?$

Da $25a^2 - 4b^2$ das Produkt von $(5a + 2b)(5a - 2b)$ ist, so ergibt sich als Generalnenner $(5a + 2b)(5a - 2b)(2a - 5b)$. Bringt man nun sämtliche Brüche des gegebenen Polynoms auf diesen Hauptnenner, so erhält man:

$$\frac{5(2a + 5b)(2a - 5b) - b(342a - b) + (a + 64b)(5a + 2b)}{(5a + 2b)(5a - 2b)(2a - 5b)}.$$

Löst man hierauf die Klammern im Zähler, so folgt:

$$\frac{20a^2 - 125b^2 - 342ab + b^2 + 5a^2 + 322ab + 128b^2}{(5a + 2b)(5a - 2b)(2a - 5b)}.$$

Die gleichnamigen Glieder zusammengefaßt, gibt:

$$\frac{25a^2 - 20ab + 4b^2}{(5a + 2b)(5a - 2b)(2a - 5b)} =$$

$$\frac{(5a - 2b)(5a - 2b)}{(5a + 2b)(5a - 2b)(2a - 5b)} =$$

$$\frac{5a - 2b}{(5a + 2b)(2a - 5b)}.$$

3) $\frac{21a - 2a^2}{2(2a^2 - 72)(6a + 9)} - \frac{2(a - 6)}{(9 + 6a)(a + 6)} - \frac{3(2a - 15)}{(4a - 24)(2a + 3)} + \frac{5(2a - 3)}{6a^2 - 216} = ?$

Trennt man zunächst die in jedem einzelnen Nenner gemeinsamen Faktoren heraus, so erhält man der Reihe nach die Nenner: $12(a^2 - 36)(2a + 3)$; $3(3 + 2a)(a + 6)$; $4(a - 6)(2a + 3)$; $6(a^2 - 36)$. Da $a^2 - 36 = (a + 6)(a - 6)$ ist, so erhält man folgenden Generalnenner: $12(a + 6)(a - 6)(2a + 3)$. Bringt man nun sämtliche Glieder des gegebenen Polynoms auf diesen Hauptnenner, so ergibt sich:

$$\frac{21a - 2a^2 - 8(a - 6)(a - 6) - 9(2a - 15)(a + 6) + 10(2a - 3)(2a + 3)}{12(a + 6)(a - 6)(2a + 3)} =$$

$$\frac{21a - 2a^2 - 8a^2 + 96a - 288 - 18a^2 + 27a + 810 + 40a^2 - 90}{12(a + 6)(a - 6)(2a + 3)} =$$

$$\frac{12a^2 + 144a + 432}{12(a + 6)(a - 6)(2a + 3)} =$$

$$\frac{12(a^2 + 12a + 36)}{12(a + 6)(a - 6)(2a + 3)} =$$

$$\frac{a^2 + 12a + 36}{(a + 6)(a - 6)(2a + 3)} =$$

$$\frac{(a + 6)(a + 6)}{(a + 6)(a - 6)(2a + 3)} =$$

$$\frac{a + 6}{(a - 6)(2a + 3)}.$$

b) Ungelöste Aufgaben.

Man vergleiche: Fuß, Aufgabensammlung §. 30.

Fünfter Abschnitt.

Von den Gleichungen.

§. 43. Von den Gleichungen im allgemeinen.

a) Der Begriff Gleichung.

Nach §. 4 ist eine Gleichung die Verbindung zweier gleichwertiger Ausdrücke durch das Gleichheitszeichen. Die Ausdrücke links und rechts vom Gleichheitszeichen heißen die Seiten der Gleichung, und zwar nach ihrer Stellung linke und rechte Seite. Die Teile jeder Seite, welche durch die Zeichen + oder — getrennt sind, nennt man Glieder. Gleichungen sind die folgenden Ausdrücke: $10 = 6 + 4$, oder $b = 10b - 9b$, oder $3x = 12$, wofern man im letzten Ausdruck dem Buchstaben x den Wert 4 beilegt.

b) Verschiedenheit der Gleichungen.

1) Die Gleichungen zerfallen in identische und in algebraische Gleichungen.

2) Jede Gleichung, worin ein Zahlenausdruck sich selbst oder einer bloßen Umformung desselben gleichgesetzt wird, heißt eine identische Gleichung, und zwar eine identische Gleichung im engern Sinn, wenn das erstere, und eine analytische Gleichung, wenn das letztere der Fall ist. So ist z. B. $a - 2b + c = a - 2b + c$ eine identische Gleichung im engern Sinn, dagegen $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, oder $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ eine analytische Gleichung. Alle bisher entwickelten Formeln sind analytische Gleichungen. Die Gleichheit der Seiten analytischer Gleichungen ist von den speziellen Zahlenwerten der darin vorkommenden Buchstaben unabhängig. So bleibt z. B. der Ausdruck $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ eine Gleichung, man mag für a und b Zahlenwerte einsetzen, welche man will.

3) Gleichungen, deren Seiten nur dann einander gleich sind, wenn einem oder mehreren Buchstaben derselben bestimmte Werte beigelegt werden, nennt man Bestimmungsgleichungen (auch synthetische, algebraische Gleichungen, oder kurz Gleichungen). So ist z. B. der Ausdruck $a + 5 = 17 - a$ eine solche Gleichung, denn die beiden Seiten sind nur unter der Bedingung einander gleich, daß $a = 6$ ist. Bestimmungsgleichungen dienen dazu, um aus bekannten Größen unbekannte zu ermitteln. Die letzteren nennt man die Unbekannten. Man pflegt die unbekannten Zahlen einer Gleichung durch die letzten, die bekannten durch Ziffern oder die ersten Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets zu bezeichnen. Obige Bestimmungsgleichung wird daher so bezeichnet: $x + 5 = 17 - x$. Eine Gleichung auflösen heißt, dieselbe so umformen, daß auf der einen Seite des Gleichheitszeichens nur x, auf der andern ein Ausdruck steht, der nur aus bekannten Zahlen zusammengesetzt ist. Den Wert der Unbekannten, der einer Gleichung genügt, nennt man auch die Wurzel der Gleichung. Durch Einsetzung der Wurzel für die Unbekannte wird die Gleichung zu einer identischen. Derjenige Teil der allgemeinen Arithmetik, der sich mit der Aufstellung von Bestimmungsgleichungen für Rechenaufgaben und mit der Auflösung dieser Gleichungen befaßt, heißt Algebra.

4) Je nach dem der höchste Exponent der Unbekannten einer Gleichung 1, 2, 3, 4 u. s. w. ist, unterscheidet man Gleichungen des ersten, zweiten, dritten, vierten u. s. w. Grades. Die Gleichungen des zweiten Grades nennt man auch quadratische, die des dritten Grades kubische und die des vierten Grades biquadratische Gleichungen. Um über den Grad einer Gleichung urteilen zu können, muß man sie erst ordnen (man vergleiche e). Die Gleichung $ax = p$ ist eine Gleichung des ersten Grades, der Ausdruck $ax^2 + bx = p$ ist eine quadratische Gleichung und die Gleichung $ax^3 + bx^2 + cx = p$ ist eine kubische Gleichung.

5) Nach der Anzahl der in einer Gleichung vorkommenden Unbekannten unterscheidet man Gleichungen mit einer, zwei oder mehr Unbekannten. Eine Gleichung, in welcher die Unbekannte als Wurzelausdruck oder mit gebrochenem Exponent erscheint, wird irrational genannt, im andern Fall rational. Eine numerische oder Zahlengleichung ist eine solche, in der sowohl

die Koefficienten der Unbekannten als auch alle anderen Glieder reine Zahlen sind. Sind sie dagegen allgemeine Zahlen, so nennt man eine solche Gleichung eine Buchstabengleichung. Kommt in einer Gleichung die Unbekannte nur in einer Potenz vor, so heißt sie eine reine, im andern Fall eine gemischte oder unreine Gleichung. So ist z. B. $x^2 = m$ eine reine, dagegen $x^2 + bx = m$ eine gemischte quadratische Gleichung.

c) Grundsatz, auf dem die Auflösung der Gleichungen beruht.

Die Auflösung der Gleichungen läßt sich auf den in §. 8, 5 angeführten Grundsatz: Gleiches auf gleiche Weise verändert bleibt gleich zurückführen. Derselbe läßt sich mit Beziehung auf die Auflösung der Gleichungen also aussprechen:

Eine Gleichung bleibt unverändert richtig, wenn man beide Seiten um gleich viel vermehrt oder vermindert, mit einer und derselben Zahl multipliciert, durch eine und dieselbe Zahl dividiert, mit einer und derselben Zahl potenziert und durch eine und dieselbe Zahl radiciert. Man pflegt diese Sätze in den einen Satz zusammenzufassen: Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man an beiden Seiten dieselbe Rechnungsoperation ausführt.

d) Sätze über die Umformung der Gleichungen.

Aus den unter c) angeführten Sätzen ergeben sich die nachstehenden Folgerungen:

1) Gleiche Glieder, welche auf verschiedenen Seiten mit demselben Vorzeichen stehen, können weggelassen werden.

Angenommen, es sei die Gleichung: $5x - 9 + 4 = 6x - 9$ gegeben, in welcher zwei gleiche Glieder mit demselben Vorzeichen auf beiden Seiten stehen. Obigem Grundsatz gemäß muß diese Gleichung richtig bleiben, wenn man diese 2 gleichen Glieder auf beiden Seiten wegläßt, also statt $5x - 9 + 4 = 6x - 9$ schreibt: $5x + 4 = 6x$; denn das Weglassen dieser beiden Glieder $- 9$ von beiden Seiten ist eine Addition der Zahl $+ 9$ zu beiden Seiten; nämlich:

$(5x - 9 + 4) + 9 = (6x - 9) + 9$, was $5x + 4 = 6x$ ergibt.

2) Man kann Glieder beliebig von der einen Seite einer Gleichung auf die andere bringen, wenn man deren Vorzeichen in die entgegengesetzten verwandelt. Diese Operation nennt man die Transposition der Glieder. Es wird in der Regel so transponiert, daß die mit den Unbekannten versehenen Glieder (die unbekannten Glieder) auf die linke Seite, die bekannten auf die rechte Seite zu stehen kommen. Eine Gleichung ist „auf Null gebracht" (reduciert), wenn alle Glieder derselben auf einer Seite stehen, also: $5x - 4x - 3 - 1 = 0$ (Normalform).

Es sei die Gleichung: $5x - 3 = 4x + 1$ vorgelegt. Bedenkt man, daß man die Zahl $+ 3$ zur linken Seite addiert und sie mithin um so viel vergrößert, wenn man das Glied $- 3$ von derselben wegläßt, diese gestörte Gleichheit zwischen beiden Seiten aber dadurch wieder hergestellt werden kann, daß man gleichzeitig, indem man das Glied $- 3$ von der linken Seite wegläßt, die Zahl $+ 3$ zur rechten Seite addiert, so leuchtet ein, daß man statt $5x - 3 = 4x + 1$, auch $5x = 4x + 1 + 3$ schreiben kann. Läßt man das Glied $+ 1$ von der rechten Seite weg, so subtrahiert man damit die Zahl $+ 1$ von dieser Seite. Subtrahiert man nun auch von der linken Seite gleichzeitig die Zahl 1, so wird offenbar die Gleichheit beider Seiten nicht vernichtet. Man kann also schreiben: $5x - 3 - 1 = 4x$ statt: $5x - 3 = 4x + 1$. Endlich kann man auch $5x - 4x = 1 + 3$ statt $5x - 3 = 4x + 1$ setzen, welche Umformung ebenso wie die vorigen auf obigem Grundsatz beruht.

3) Man darf die Vorzeichen sämtlicher Glieder einer Gleichung in die entgegengesetzten verwandeln.

Die Richtigkeit dieses Satzes ergibt sich, wenn man beide Seiten transponiert, oder dieselben mit $- 1$ multipliciert.

4) Jedes Glied einer Gleichung kann von seinem Koefficienten befreit werden, wenn man die ganze Gleichung durch denselben dividiert.

Angenommen die Gleichung $5x = 20$ sei gegeben. Läßt man den Koefficienten von x, nämlich 5, von der linken Seite weg, so wird hiedurch diese Seite durch 5 dividiert. Um die Gleichheit beider Seiten

nicht zu verletzen, muß auch die rechte Seite durch 5 dividiert werden; auf diese Weise erhält man: $x = 20 : 5 = 4$, statt $5x = 20$.

5) Brüche, die in einer Gleichung vorkommen, können dadurch beseitigt werden, daß man die ganze Gleichung mit dem Generalnenner dieser Brüche multipliciert.

Es sei $\frac{19 - x}{2} - \frac{39 - x}{3} = -4$ die von den Brüchen zu befreiende Gleichung. Multipliciert man dieselbe mit dem Generalnenner ihrer Brüche, nämlich mit 6, so folgt:

$$\frac{(19 - x)6}{2} - \frac{(39 - x)6}{3} = -4 \cdot 6$$

Oder: $(19 - x)3 - (39 - x)2 = -24$

" $57 - 3x - 78 + 2x = -24$

" $-x = -3$

" $x = 3$.

Aus dem Vorstehenden ist ersichtlich, daß man die Glieder einer Gleichung am schnellsten von ihren Nennern befreit, indem man mit denselben in den Generalnenner dividiert und den Quotienten mit dem Zähler des betreffenden Gliedes multipliciert.

6) Steht die Unbekannte unter einem Wurzelzeichen, so kann dieses dadurch beseitigt werden, daß man beide Seiten der Gleichung zum Wurzelexponenten potenziert.

Ist $\sqrt{x + 2} = 3$ die vorgelegte Gleichung und man erhebt beide Seiten auf das Quadrat, so erhält man: $x+2=9$ und hieraus $x=7$.

e) Gang bei der Auflösung einer Gleichung.

Bei der Auflösung einer Gleichung schlägt man im allgemeinen folgenden Gang ein:

1) Man befreit die vorgelegte Gleichung von den Klammern, Nennern und Wurzeln, welche die Unbekannte enthalten, man reduciert die Gleichung. Die Klammern werden dadurch entfernt, daß man die an ihnen angedeutete Rechnung vollzieht; die Nenner beseitigt man durch Multiplikation sämtlicher Glieder der Gleichung mit dem Generalnenner aller Brüche; um endlich eine in einer Gleichung vorhandene Wurzel fortzuschaffen, isoliert man dieselbe von allen übrigen Gliedern durch Transposition und potenziert

hierauf beide Seiten der Gleichung auf den Grad des Wurzelexponenten. Nach jeder dieser drei Operationen aber faßt man etwaige gleichnamige Glieder zusammen und hebt gemeinschaftliche Faktoren auf.

2) Hierauf ordnet man die reducierte Gleichung, indem man transponiert, die gleichnamigen Glieder zusammenfaßt und schließlich die höchste Potenz der Unbekannten von ihrem Koefficienten befreit. — Zur Erläuterung diene folgendes Beispiel:

$$\frac{16\sqrt{x+3}}{x-2} - (16-2x) = \frac{2(24-3x)}{x-2} + 2x - 7.$$

Klammern gelöst und die 2 Glieder 2x weggelassen:

$$\frac{16\sqrt{x+3}}{x-2} - 16 = \frac{48-6x}{x-2} - 7.$$

Die Nenner fortgeschafft:

$$16\sqrt{x+3} - 16x + 32 = 48 - 6x - 7x + 14.$$

Die Wurzel isoliert und gleichnamige Glieder zusammengefaßt:

$$16\sqrt{x+3} = 3x + 30$$

Mit 2 potenziert und die Klammern aufgelöst:

$$256x + 768 = 9x^2 + 180x + 900.$$

Transponiert und zusammengefaßt:

$$-9x^2 + 76x = 132.$$

Die ganze Gleichung mit -1 multipliciert und durch 9 dividiert:

$$x^2 - \frac{76x}{9} = -\frac{132}{9}$$

Die weitere Auflösung dieser Gleichung folgt später.

A. Gleichungen des ersten Grades.

I. Mit einer Unbekannten.

§. 44. Auflösung gegebener Gleichungen.

A. Erklärung.

Die Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten sind durch das Reducieren und Ordnen derselben bereits gelöst. Zur näheren Erläuterung des im vorigen § angedeuteten Verfahrens folgen nachstehend einige vollständig aufgelöste Gleichungen.

B. Übungsaufgaben.

a) Gleichungen mit Auflösung.

I) Gleichungen mit bestimmten Zahlen.

1) $10x - 16 - 5x + 6 = 100 - 12x + 3x + 2$

Transponiert u. addiert: $14x = 112$

x isoliert: $x = 8$

Denk- und Sprechweise. Auf der linken Seite sind $(+10x) + (-5x) = +5x$, auf der rechten Seite $(-12x) + (+3x) = -9x$. Letztere schaffe ich auf die linke Seite und erhalte hier $(+5x) + (+9x) = 14x$. Ferner ist $(-16) + (+6)$ der linken Seite $= -10$ und $(+100) + (+2)$ der rechten Seite $= +102$. Bringe ich -10 von der linken Seite auf die rechte, so erhalte ich hier $(+102) + (+10) = +112$. Mithin heißt die Gleichung jetzt $14x = 112$, und hieraus ist $x = 8$.

2) $100 - x = 84$

Transponiert u. addiert: $16 = x$

Oder: $x = 16$.

Erläuterung. In der Regel bringt man beim Transponieren die Glieder mit x auf die linke Seite der Gleichung. Bekommt x hiedurch auf der linken Seite einen negativen Koefficienten (wird negativ), so kann man von dieser Regel abweichen, die Glieder mit x auf die rechte Seite bringen und dann die Gleichung $a = x$ umstellen in $x = a$. Man kann aber auch in diesem Fall die Glieder mit x auf die linke Seite schaffen und dann die Gleichung mit -1 multiplicieren.

3) $20x - (30x - 51) = 44 - (8x + 3)$

Die Kl. aufgel.: $20x - 30x + 51 = 44 - 8x - 3$

Transp. und addiert: $-2x = -10$

Mit -1 multipliciert: $2x = 10$

x isoliert: $x = 5$.

4) $\frac{x}{2} + \frac{2x}{3} + \frac{3x}{5} - \frac{5x}{6} = 2x - 60 - \frac{x}{15}$

Transponiert u. addiert: $-x = -60$

Mit -1 multipliciert: $x = 60$

5) $\frac{5x - 3}{9} + 4 = \frac{6x + 4}{5} - \frac{51 - x}{45}$

Die Nenner beseitigt: $25x - 15 + 180 = 54x + 36 - 51 + x$

Transponiert und addiert: $-30x = -180$

Mit -1 multipliciert: $30x = 180$

x isoliert: $x = 6$.

6) $\frac{3 - 4x}{x + 2} = \frac{12 - 6x}{x - 2} - 10 + \frac{12x^2 - 6}{x^2 - 4}$

Mit dem Generalnenner $x^2 - 4$ multipliciert, erhält man:

$(3 - 4x)(x - 2) = (12 - 6x)(x + 2) - 10(x^2 - 4) + 12x^2 - 6$

Die Klammern aufgelöst, kommt:

$$3x - 4x^2 - 6 + 8x = 12x + 24 - 6x^2 - 12x - 10x^2 + 40 + 12x^2 - 6$$

Transp. und zusammengefaßt: $11x = 64$

x isoliert: $x = 5\frac{9}{11}$.

II. Gleichungen mit allgemeinen Zahlen.

1) $nx - amn + m(b - x) = d - mnx$

Kl. aufgelöst und transponiert:

$$nx - mx + mnx = d + amn - bm$$

Den gemeins. Faktor x ausgeschieden:

$$x(n - m + mn) = d + amn - bm$$

x isoliert: $x = \frac{d + amn - bm}{n - m + mn}$

2) $\frac{ab^2 + abd - abx}{d - c} = ax - ac.$

Die ganze Gleichung mit $d - c$ multipliciert, erhält man:

$$ab^2 + abd - abx = ax(d - c) - ac(d - c).$$

Die Klammern gelöst: $ab^2 + abd - abx = adx - acx - acd + ac^2.$

Transponiert: $acx - abx - adx = ac^2 - ab^2 - acd - abd.$

Den gemeinsamen Faktor x herausgetrennt:

$$x(ac - ab - ad) = ac^2 - ab^2 - acd - abd.$$

x isoliert: $x = \frac{ac^2 - ab^2 - acd - abd}{ac - ab - ad}$

Die Division ausg.: $x = c + b.$

III. Gleichungen mit Wurzelausdrücken.

1) $\sqrt{16x^2 - 31} + 1 = 4x.$

Den Wurzelausdruck isoliert: $\sqrt{16x^2 - 31} = 4x - 1.$

Beide Seiten mit 2 potenziert: $16x^2 - 31 = (4x - 1)^2$

Oder: $16x^2 - 31 = 16x^2 - 8x + 1.$

Transponiert und addiert: $8x = 32$

x isoliert: $x = 4.$

2) $12x - 3\sqrt{25x^2 - 20x - 65} = 15 - 3x.$

Die Wurzelgr. isoliert: $15x - 15 = 3\sqrt{25x^2 - 20x - 65}$

Durch 3 dividiert: $5x - 5 = \sqrt{25x^2 - 20x - 65}$

Mit 2 potenziert: $25x^2 - 50x + 25 = 25x^2 - 20x - 65$
Transponiert und addiert: $30x = 90$
x isoliert: $x = 3.$

3) $5x + 1 = 4(2 + x) + \sqrt{49 - x\sqrt{x^2 - 56}}.$

Die Wurzelg. isoliert: $x - 7 = \sqrt{49 - x\sqrt{x^2 - 56}}.$
Beide Seiten quadriert: $(x - 7)^2 = 49 - x\sqrt{x^2 - 56}.$
Klammer gelöst: $x^2 - 14x + 49 = 49 - x\sqrt{x^2 - 56}.$
Zusammengefaßt und den Wurzelausdruck isoliert:

$$x\sqrt{x^2 - 56} = 14x - x^2.$$

Mit 2 potenziert: $x^2(x^2 - 56) = (14x - x^2)^2.$
Klammern gelöst: $x^4 - 56x = 196x^2 - 28x^3 + x^4.$
Zusammengezogen: $28x^3 - 252x^2 = 0.$
Durch x^2 dividiert: $28x = 252.$
x isoliert: $x = 9.$

4) $\sqrt{x - 6} + \sqrt{x + 5} = 11.$

Mit 2 potenziert:

$$x - 6 + 2\sqrt{(x - 6)(x + 5)} + x + 5 = 121.$$

Vereinfacht und Klammern gelöst:

$$2x - 1 + 2\sqrt{x^2 - x - 30} = 121.$$

Den Wurzelausdruck isoliert:

$$2\sqrt{x^2 - x - 30} = 122 - 2x.$$

Mit 2 potenziert: $4(x^2 - x - 30) = (122 - 2x)^2.$
Klammern gelöst: $4x^2 - 4x - 120 = 14884 - 488x + 4x^2.$
Transponiert und zusammengezogen:

$$484x = 15004$$
$$x = 31.$$

b) Gleichungen ohne Auflösung.

Man vergleiche: Fuß, Aufgabensammlung, §. 31.

§. 45. Aufstellung von Gleichungen für Textaufgaben und Auflösung derselben.

A. Erklärungen.

Soll eine in Worten gegebene Aufgabe durch eine Bestimmungsgleichung gelöst werden, so hat man zunächst die Angaben der Aufgabe in die mathematische Sprache zu übersetzen. Zu dem Zweck

nimmt man die zu suchende Zahl als gefunden an, bezeichnet sie mit x und vollzieht an derselben andeutungsweise alle die Verknüpfungen, welche die Aufgabe vorschreibt. Hiedurch muß man zwei Ausdrücke zu erhalten suchen, welche einander gleichgesetzt werden können. Die aus ihnen gebildete Bestimmungsgleichung wird nach den Regeln des §. 43 aufgelöst. Aus ihr resultiert die zu suchende Zahl. Wie man ersieht, lassen sich für die Aufstellung der Bestimmungsgleichung einer Aufgabe keine bestimmten Regeln geben; sie ist von der Beschaffenheit der vorliegenden Aufgabe bedingt und Sache der Überlegung des Rechnenden. Um zu zeigen, wie bei der Aufstellung von Bestimmungsgleichungen für Textaufgaben zu verfahren ist, sollen im Nachfolgenden einige Beispiele ausführlich erörtert werden.

B. Übungsaufgaben.

a) Aufgaben mit Auflösung.

1) Wenn man eine gewisse Zahl mit a = 3 multipliciert, zu dem Produkt b = 8 addiert, die Summe durch c = 4 dividiert, endlich von dem Quotienten d = 5 subtrahiert, so erhält man m = 15; wie heißt die Zahl?

Auflösung.

a) Mit den gegebenen Buchstaben.

Die zu suchende Zahl sei	x
Alsdann ist die mit a multiplicierte Zahl .	ax
Das um b vermehrte Produkt	$ax + b$
Die durch c dividierte Summe	$(ax + b) : c$
Und der um d verminderte Quotient .	$(ax + b) : c - d$

Da nun diese Differenz gleich m ist, so erhält man die folgende Gleichung:

$$\frac{ax + b}{c} - d = m$$

Mit c multipliciert: $ax + b - cd = cm$

Transponiert: $ax = cm - b + cd$

x isoliert: $x = \frac{c(d + m) - b}{a}$

Die geg. Z. eingesetzt: $x = \frac{4(5 + 15) - 8}{3}$

Das ist: $x = 24.$

b) Mit den gegebenen Zahlen.

α) Algebraisch.

Die zu suchende Zahl sei	x
Alsdann ist die mit 3 multiplicierte Zahl . .	$3x$
Und das um 8 vermehrte Produkt	$3x + 8$
„ die durch 4 dividierte Summe	$(3x + 8) : 4$
„ der um 5 verminderte Quotient	$(3x + 8) : 4 - 5$

Da nun die so erhaltene Zahl 15 sein soll, so ergibt sich die folgende Gleichung:

$$\frac{3x + 8}{4} - 5 = 15$$

Den Nenner beseitigt: $3x + 8 - 20 = 60$
Transponiert u. zusg.: $3x = 72$
x isoliert: $x = 24.$

β) Arithmetisch.

Die Zahl 15 ist dadurch entstanden, daß man von einer andern Zahl 5 subtrahierte; diese Zahl ist demnach $15 + 5 = 20$. Diese Zahl 20 ist nach der Aufgabe der Quotient einer Zahl, dessen Divisor 4 beträgt; folglich ist der Dividendus $4 \cdot 20 = 80$. Die Zahl 80 entstand aus einer andern Zahl durch Addition der Zahl 8 zu ihr; weshalb diese andere Zahl $80 - 8 = 72$ ist. Da nun 72 nach der Aufgabe das Dreifache der gedachten Zahl ist, so muß diese selbst $72 : 3 = 24$ sein.

Anmerkung. Die in einer Aufgabe gesuchte Zahl muß durch die darin gegebenen anderen Zahlen bestimmt sein. So ist z. B. die in der vorigen Aufgabe gesuchte Zahl x durch die gegebenen Zahlen 3, 8, 4, 5 und 15 vollständig bestimmt. Die Hauptsache der Auflösung einer Aufgabe besteht nun offenbar darin, daß dargelegt wird, wie die gegebenen Zahlen mit einander verbunden werden müssen, damit sich die gesuchte Zahl ergibt, daß also ein Gesetz oder eine Auflösungsformel aus der Aufgabe abgeleitet wird. Um das Gesetz, welches mit einem Blick ersehen läßt, auf welche Weise eine gesuchte Zahl aus gegebenen Zahlen entsteht, zu finden, kann man die mit einander in Beziehung stehenden Zahlen mit Buchstaben andeuten, die Beziehungen durch eine Gleichung ausdrücken und diese dann auf die gesuchte Größe reducieren. Auf diese Weise wurde oben unter a) für die gesuchte Zahl x die For-

mel $[c(d + m) - b] : a$ gefunden. In Worten ausgesprochen, lautet dieselbe: Man findet aus den gegebenen Zahlen 3, 8, 4, 5 und 15 die unbekannte Zahl, wenn man die Summe von 5 und 15 mit 4 multipliciert, hievon 8 subtrahiert und die erhaltene Differenz durch 3 dividiert. Hat man mit Hilfe von Buchstaben eine allgemeine Auflösungsformel entwickelt, so braucht man nur, um die Aufgabe mit Berücksichtigung der gegebenen bestimmten Zahlen zu lösen, letztere in die Formel einzusetzen. — Da die allgemeine Auflösung von Aufgaben dem Anfänger mehr Schwierigkeit bereitet als die mit bestimmten Zahlen, so wird man gut thun, anfangs von der ersteren nur beschränkten Gebrauch zu machen. Ich habe in der Regel beide Auflösungsweisen neben einander gesetzt.

Die obige, in bestimmten Zahlen ausgedrückte Aufgabe ist sowohl algebraisch als arithmetisch aufgelöst. Zwischen beiden Auflösungsweisen findet folgender Unterschied statt. Bei dem arithmetischen Verfahren schreitet man vom Bekannten zum Unbekannten vorwärts, setzt das gesuchte Resultat der Aufgabe aus den gegebenen bekannten Daten zusammen, geht synthetisch zu Werke; bei dem algebraischen Verfahren dagegen nimmt man die vorgelegte Aufgabe als gelöst, die zu suchende Zahl als gefunden an, bezeichnet deshalb die Unbekannte und führt sie gleich mit in die Rechnung ein, man stellt eine Bestimmungsgleichung auf, die man sodann auflöst (Analytische Auflösungsweise). — Es ist sehr geistbildend, die durch Gleichungen gelösten Aufgaben auch nach dem arithmetischen Verfahren aufzulösen. Beide Verfahrungsarten müssen daher geübt werden.

2) Wenn man eine gewisse Zahl mit $a = 6$ multipliciert, zum Produkt $b = 5$ addiert, die Summe durch $c = 4$ dividiert, den Quotienten um $d = 7$ vermehrt, das Resultat durch $e = 3$ dividiert, von dem nunmehrigen Quotienten $f = 2$ subtrahiert und endlich diesen Rest mit $g = 1\frac{1}{3}$ multipliciert, so erhält man die gesuchte Zahl. Wie heißt sie?

Auflösung

a) Mit den gegebenen Buchstaben.

Die zu suchende Zahl sei	x
Alsdann ist die mit a multiplicierte Zahl	ax
Das um b vermehrte Produkt	$ax + b$
Die durch c dividierte Summe	$(ax + b) : c$

Der um d verm. Quotient: $(ax + b) : c + d = (ax + b + cd) : d$
Das durch e dividierte Resultat: . . . . $(ax + b + cd) : ce$
Der um f verminderte Quotient: . . $(ax + b + cd - cef) : ce$
Und der mit g multiplicierte Quotient $[(ax + b + cd - cef) : ce]g$
Daher die Gleichung:

$$\frac{ax + b + cd - cef}{ce} \cdot g = x$$

Mit ce mult.: $agx + bg + cdg - cefg = cex$
Transponiert: $agx - cex = - bg - cdg + cefg$
Mit — 1 mult.: $cex - agx = bg + cdg - cefg$
Zusammengez.: $x(ce - ag) = (b + cd - cef)g$
x isoliert: $x = \frac{(b + cd - cef)g}{ce - ag}$
Die geg. Zahlen eing.: $x = \frac{(5 + 4 \cdot 7 - 4 \cdot 3 \cdot 2)1\frac{1}{3}}{4 \cdot 3 - 6 \cdot 1\frac{1}{3}}$
Das ist: $x = 3.$

b) Mit den gegebenen Zahlen.

Wie unter a).

3) Ein Kaufmann vermehrt sein Vermögen jährlich um die Hälfte, scheidet aber von demselben alle Jahre 2000 Mark zu seinem Unterhalt aus. Dadurch hat sich das anfängliche Vermögen nach 3 Jahren um 1000 Mark über das $2\frac{1}{2}$fache desselben vermehrt. Wie groß war das Vermögen anfangs?

Auflösung.

α) Algebraisch.

Das anfängliche Vermögen sei . . . . x M.
Alsd. ist d. V. am Ende d. 1. J.: $\frac{3x}{2} - 2000 = \ldots \frac{3x - 4000}{2}$
Und „ „ „ 2. „ $\frac{3}{2} \cdot \frac{3x - 4000}{2} - 2000 = \ldots \frac{9x - 20000}{4}$
„ „ „ „ 3. „ $\frac{3}{2} \cdot \frac{9x - 20000}{4} - 2000 = \frac{27x - 76000}{8}$

Da nun dieses Vermögen um 1000 M größer ist als das $2\frac{1}{2}$fache des ursprünglichen, so erhält man die folgende Gleichung:

$$\frac{27x - 76000}{8} = \frac{5x}{2} + 1000$$

Mit 8 multipliciert: $27x - 76000 = 20x + 8000$
Transp. und zusammengefaßt: $7x = 84000$
x isoliert: $x = 12000$ *M* als anfängliches Vermögen.

β) Arithmetisch.

Am Ende des ersten Jahres besitzt der Kaufmann das $1\frac{1}{2}$fache seines ursprünglichen Vermögens weniger 2000 *M*. Am Ende des zweiten Jahres besitzt er $1\frac{1}{2}$ mal so viel als am Ende des ersten Jahres weniger 2000 *M*, d. i. $2\frac{1}{4}$ mal so viel als anfangs weniger 5000 *M*. Am Ende des dritten Jahres endlich hat er $1\frac{1}{2}$ mal so viel als am Ende des zweiten Jahres weniger 2000 *M*, d. i. $3\frac{3}{8}$ mal so viel als anfangs weniger 9500 *M*. Nach der Aufgabe besitzt er aber am Ende des dritten Jahres $2\frac{1}{2}$ mal so viel als anfangs und 1000 *M*. Daraus folgt, daß $3\frac{3}{8}$ des ursprünglichen Vermögens weniger 9500 *M* ebenso viel ist als das $2\frac{1}{2}$fache desselben und 1000 *M*, oder das $3\frac{3}{8}$fache des ursprünglichen Vermögens ebenso viel, als das $2\frac{1}{2}$fache desselben $+ 1000 + 9500$ oder $+ 10500$. Demnach beträgt das $\frac{7}{8}$fache des ursprünglichen Vermögens (der Unterschied zwischen dem $3\frac{3}{8}$fachen und $2\frac{1}{2}$fachen) 10500 *M*, also $\frac{1}{8}$ desselben 1500 *M* und das ganze anfängliche Vermögen 12000 *M*.

4) Ein Stück Land, das 6540 ha enthält, soll unter 5 Gemeinden so verteilt werden, daß die Gemeinde B 340 ha mehr erhält, als die Gemeinde A, der Anteil der Gemeinde B sich zu dem der Gemeinde C wie 2 : 3 verhält, die Gemeinde D 260 ha weniger bekommt als der dreifache Anteil der Gemeinde B ausmacht und sich endlich der Anteil von C zu dem der Gemeinde E wie 3 : 4 verhält. Wie viel erhält jede Gemeinde?

Auflösung.

α) Algebraisch.

Der Anteil der Gemeinde A sei, in ha ausgedrückt x
Alsdann ist der Anteil der Gemeinde B . . . . $x + 340$
Und „ „ „ „ C: $(x + 340)\frac{3}{2} = \frac{3x + 1020}{2}$
„ „ „ „ „ D: $(x + 340)3 - 260 = 3x + 760$
„ „ „ „ „ E: $\frac{3x + 1020}{2} \cdot \frac{4}{3} = 2x + 680$

Daher die Gleichung:

$$x + x + 340 + \frac{3x + 1020}{2} + 3x + 760 + 2x + 680 = 6540$$

Transp. u. zusammengefaßt: $\frac{17x}{2} = 4250.$

Nenner beseitigt: $17x = 8500$

x isoliert: $x = 500$ ha als Anteil d. Gemeinde A

Und $x + 340 = 840$ " " " " " B

" $\frac{3x + 1020}{2} = 1260$ " " " " " C

" $3x + 760 = 2260$ " " " " " D

" $2x + 680 = 1680$ " " " " " E

β) Arithmetisch.

Die Gemeinde A bekomme, in ha ausgedrückt . . . . . 1 Tl.

Alsdann bekommt die Gemeinde B . . . . . . 1 Tl. + 340 ha

Und die Gemeinde C: (1 Tl. + 340 ha) . $\frac{3}{2}$ = $\frac{3}{2}$ Tl. + 510 ha

" " " D: (1 Tl. + 340 ha) . 3 — 260 ha = 3 Tl + 760 ha

" " " E: ($\frac{3}{2}$ Tl. + 510 ha) . $\frac{4}{3}$ = 2 Tl. + 680 ha

Mithin erhalten Gemeinde A + B + C + D + E = $8\frac{1}{2}$ Tl. + 2290 ha

Demnach betragen $8\frac{1}{2}$ Tl. + 2290 ha = 6540 ha

Also $8\frac{1}{2}$ Tl. = 6540 — 2290 ha = 4250 ha.

Auf $\frac{1}{2}$ Tl. kommen also 4250 ha : 17 = 250 ha

Und auf 1 Tl. 2 . 250 = 500 ha

Gemeinde A erhält 1 Tl. = 500 ha

" B " 1 Tl. + 340 ha = 840 ha

" C " $\frac{3}{2}$ Tl. + 510 ha = 1260 ha

" D " 3 Tl. + 760 ha = 2260 ha

" E " 2 Tl. + 680 ha = 1680 ha.

5) Jemand bestimmt in seinem Testament, daß sein Verwandter M. den achten Teil seines hinterlassenen Vermögens und außerdem 1500 ℳ, und sein Diener den zehnten Teil des Restes und 300 ℳ bekommen soll. Der nunmehrige Rest soll der Volksschule, dem Waisenhaus und dem Spital seiner Vaterstadt zufallen, und zwar soll die erstere den fünften Teil des letzten Restes und 880 ℳ, das Waisenhaus $\frac{3}{10}$ des jetzigen Restes und 1320 ℳ und das Spital endlich den letzten Rest, der 23600 ℳ beträgt, erhalten. Wie groß

ist das hinterlassene Vermögen und wie viel bekommt hievon der Verwandte, der Diener, die Volksschule und das Waisenhaus?

Auflösung a).

Angenommen, das hinterlassene Vermögen sei . . . . . . x *M*

Der Verwandte erhält: $\frac{x}{8} + 1500 = \quad . . . \quad \frac{x + 12000}{8}$

Der Rest beträgt: $x - \frac{x + 12000}{8} = \frac{8x - x - 12000}{8} = \frac{7x - 12000}{8}$

Der Diener bekommt: $\frac{7x - 12000}{8} \cdot \frac{1}{10} + 300 = \frac{7x - 12000}{80}$

$+ 300 = \frac{7x - 12000 + 24000}{80} = \frac{7x + 12000}{80}$

Der nunmehrige Rest ist: $\frac{7x - 12000}{8} - \frac{7x + 12000}{80} =$

$\frac{70x - 120000 - 7x - 12000}{80} = \frac{63x - 132000}{80}$

Der Volksschule fallen zu: $\frac{63x - 132000}{80} \cdot \frac{1}{5} + 880 = \frac{63x - 132000}{400}$

$+ 880 = \frac{63x - 132000 + 352000}{400} = \frac{63x + 220000}{400}$

Der jetzige Rest beträgt: $\frac{63x - 132000}{80} - \frac{63x + 220000}{400} =$

$\frac{315x - 660000 - 63x - 220000}{400} = \frac{252x - 880000}{400} =$

$\frac{63x - 220000}{100}$

Das Waisenhaus bekommt: $\frac{63x - 220000}{100} \cdot \frac{3}{10} + 1320 =$

$\frac{189x - 660000}{1000} + 1320 = \frac{189x - 660000 + 1320000}{1000} =$

$\frac{189x + 660000}{1000}$

Der nunmehrige Rest ist: $\frac{63x - 220000}{100} - \frac{189x + 660000}{1000} =$

$\frac{630x - 2200000 - 189x - 660000}{1000} = \frac{441x - 2860000}{1000}$

Da nun dieser Rest 23600 *M.* beträgt, so hat man

$$\frac{441x - 2860000}{1000} = 23600$$

Oder: $441x - 2860000 = 23600000$

" $441x = 26460000$

Mithin: $x = 60000$ *M* als hinterlassenes Vermögen.

Hievon bekommt:

Der Verwandte: $\frac{x + 12000}{8} = 9000$ *M*

Der Diener: $\frac{7x + 12000}{80} = 5400$ *M*

Die Volksschule: $\frac{63x + 220000}{400} = 10000$ *M*

Das Waisenhaus: $\frac{189x + 660000}{1000} = 12000$ *M*

Und das Spital: 23600 *M*

Auflösung b).

Das hinterlassene Vermögen mit x *M* bezeichnet, erhält man folgende Gleichung:

$$\frac{7}{10}\left[\frac{4}{5}\left(\frac{9}{10}\left(\tfrac{7}{8}x - 1500\right) - 300\right) - 880\right] - 1320 = 23600$$

Hieraus ist $x = 60000$ *M.*

b) Ungelöste Aufgaben.

Man vergleiche: Fuß, Aufgabensammlung §. 32.

II. Mit mehreren Unbekannten.

§. 46. Auflösung gegebener Gleichungen.

A. Erklärungen.

Zur Bestimmung mehrerer unbekannter Zahlen sind so viele von einander unabhängige Bestimmungsgleichungen erforderlich als unbekannte Zahlen vorhanden sind. Die Unbekannten werden gefunden, indem man sie nach einander aus den Gleichungen wegschafft (eliminiert). Auf diese Weise erhält man aus n Gleichungen mit n Unbekannten (n — 1) Gleichungen mit (n — 1) Unbekannten, aus (n - 1) Gleichungen mit (n — 1) Unbekannten

(n — 2) Gleichungen mit (n — 2) Unbekannten u. s. w. abwärts bis zu einer Gleichung mit einer Unbekannten. Je nach dem Verfahren, das man einschlägt, um die Endgleichung zu erhalten, unterscheidet man vier Auflösungs- oder Eliminationsmethoden, die im nachfolgenden entwickelt werden sollen.

a) Die Substitutionsmethode.

I. Um das Wesen dieser Methode zu erkennen, bedenke man zunächst folgendes. Jede der zwei Unbekannten muß in den beiden Gleichungen:

$$1)\ 4x + 3y = 31$$

$$2)\ 5x - 2y = 10$$

denselben Wert haben. Löst man nun eine dieser zwei Gleichungen für die eine der beiden Unbekannten, z. B. für x, auf und setzt den hiefür erhaltenen Zahlenausdruck in die andere Gleichung anstatt x ein (substituiert den Wert für x), so muß x aus dieser Gleichung eliminiert werden und man muß zugleich eine Gleichung mit nur einer Unbekannten erhalten. Also:

Aus 1) ist $x = (31 - 3y) : 4$. Diesen Wert für x in Gleichung 2) substituiert, kommt:

$$3)\ 5 \cdot \frac{31 - 3y}{4} - 2y = 10$$

Oder $155 - 15y - 8y = 40$

" $-23y = -115$

" $23y = 115$

Und hieraus $y = \frac{115}{23} = 5.$

Setzt man diesen für y gefundenen Wert in eine der gegebenen Gleichungen, z. B. in die erste, für y, so erhält man:

$$4x + 15 = 31$$

Und hieraus $x = 4.$

II. Sind 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten gegeben, so entwickelt man aus einer derselben eine der 3 Unbekannten und setzt diesen Wert statt dieser Unbekannten in die zwei andern Gleichungen. Hiedurch erhält man zwei Gleichungen mit nur zwei Unbekannten. Wendet man auf diese das im 1. Beispiel gezeigte Verfahren an, so gelangt man schließlich zu einer Gleichung mit einer Unbekannten. Also:

$$1)\ 4x + 3y + 6z = 41$$
$$2)\ 5x - 2y + z = 8$$
$$3)\ 2x - 4y + 5z = 12.$$

Aus 3) ist $x = \frac{12 + 4y - 5z}{2}.$

Diesen Wert in 1) substituiert, kommt:

$$4)\ 4 \cdot \frac{12 + 4y - 5z}{2} + 3y + 6z = 41$$

Oder $48 + 16y - 20z + 6y + 12z = 82$

" $5)\ 22y - 8z = 34.$

Den Wert von x in 2) substituiert, erhält man:

$$6)\ 5 \cdot \frac{12 + 4y - 5z}{2} - 2y + z = 8$$

Oder $60 + 20y - 25z - 4y + 2z = 16$

" $7)\ 16y - 23z = -44.$

Die beiden Gleichungen:

$$5)\ 22y - 8z = 34$$
$$7)\ 16y - 23z = -44$$

enthalten noch die beiden Unbekannten y und z.

Aus 7) ist $y = \frac{23z - 44}{16}$

Diesen Wert für y in 5) substituiert, erhält man:

$$8)\ 22 \cdot \frac{23z - 44}{16} - 8z = 34$$

Oder $506z - 968 - 128z = 544$

" $378z = 1512$

Und hieraus $z = \frac{1512}{378} = 4.$

Setzt man diesen Wert für z in 5), so erhält man:

$$9)\ 22y - 32 = 34$$

Oder $22y = 66$

Und daraus $y = \frac{66}{22} = 3.$

Trägt man endlich diese beiden Werte etwa in 1) ein, so ergibt sich:

$$10)\ 4x + 9 + 24 = 41$$

Oder $4x = 8$

Und daraus $x = 2.$

Also: $x = 2,\ y = 3$ und $z = 4.$

Es ist kaum zu bemerken nötig, daß die soeben entwickelte Auflösungsmethode auch dann anwendbar ist, wenn 4 Gleichungen mit 4 Unbekannten, 5 Gleichungen mit 5 Unbekannten u. s. w. gegeben sind. Das Verfahren, Gleichungen nach der Substitutionsmethode aufzulösen, läßt sich folgendermaßen kurz und bündig zusammenfassen:

Sind n Gleichungen mit n Unbekannten gegeben, so bestimmt man aus einer der n Gleichungen eine Unbekannte und substituiert deren Wert für diese Unbekannte in jede der übrigen (n — 1) Gleichungen. Hiedurch wird in diesen eine Unbekannte eliminiert, so daß man (n — 1) Gleichungen mit höchstens (n — 1) Unbekanten erhält. Eine dieser (n — 1) Gleichungen löst man hierauf für eine zweite Unbekannte auf und trägt deren Wert in die noch vorhandenen (n — 2) Gleichungen ein, wodurch sich (n — 2) Gleichungen mit höchstens (n — 2) Unbekannten ergeben. Dieses Verfahren wird solange fortgesetzt, bis man bei einer Gleichung mit einer Unbekannten angelangt ist, aus der man in der bekannten Weise diese ermittelt. Die übrigen Unbekannten werden aus den vorhergehenden Gleichungen durch Substitution gefunden.

b) Die Komparations- oder Kombinationsmethode.

I. Es sind die zwei Gleichungen:

$$1)\ 4x + 3y = 31$$
$$2)\ 5x - 2y = 10$$

nach dieser Methode aufzulösen. Da x und y in den beiden Gleichungen beziehlich denselben Wert haben, so müssen auch die Zahlenausdrücke, die man etwa für x aus den zwei Gleichungen erhält, wenn man dieselben auf diese Unbekannte reduciert, notwendig einander gleich sein. Bildet man daher aus den für x erhaltenen Werten eine Gleichung, so wird damit x offenbar eliminiert, indem diese neue Gleichung nur noch y enthält. Demnach:

Aus 1) ist $x = \frac{31 - 3y}{4}$

„ 2) „ $x = \frac{10 + 2y}{5}$

Also ist $3)\ \frac{31 - 3y}{4} = \frac{10 + 2y}{5}$

Oder $155 - 15y = 40 + 8y$

" $-23y = -115$

" $23y = 115$

Und daraus $y = \frac{115}{23} = 5.$

x wird bestimmt, indem man den Wert von y aus 1) und 2) bestimmt und beide Werte einander gleich setzt. Man erhält so $x = 4$.

II) 1) $4x + 3y + 6z = 41$

2) $5x - 2y + z = 8$

3) $2x - 4y + 6z = 12.$

Man löst zunächst jede Gleichung für eine und dieselbe Unbekannte, z. B. für x, auf

Aus 1) ist $x = \frac{41 - 3y - 6z}{4}$

Aus 2) ist $x = \frac{8 + 2y - z}{5}$

Aus 3) ist $x = \frac{12 + 4y - 5z}{2}.$

Aus diesen für x erhaltenen Werten bildet man nun zwei Gleichungen, was dadurch geschehen kann, daß man etwa den ersten Wert dem zweiten und den ersten dem dritten gleichsetzt (oder wie?). Hiedurch erhält man, indem man Wert 1) und 2) einander gleichsetzt:

4) $\frac{41 - 3y - 6z}{4} = \frac{8 + 2y - z}{5}$

Oder $205 - 15y - 30z = 32 + 8y - 4z$

" $-23y - 26z = -173$

" 5) $23y + 26z = 173$

Bildet man nun auch aus Wert 1) und Wert 3) eine Gleichung, so folgt:

6) $\frac{41 - 3y - 6z}{4} = \frac{12 + 4y - 5z}{2}$

Oder $41 - 3y - 6z = 24 + 8y - 10z$

" 7) $-11y + 4z = -17.$

Aus 5) ist $z = \frac{173 - 23y}{26}$

Aus 7) ist $z = \frac{-17 + 11y}{4}.$

Folglich: 8) $\frac{173 - 23y}{26} = \frac{-17 + 11y}{4}$

Oder $346 - 46y = -221 + 143y$

" $-189y = -567$

" $189y = 567$

Und daraus $y = \frac{567}{189} = 3.$

x und z werden auf ähnliche Weise gefunden.

In vorstehenden 2 Beispielen ist das Wesen der Komparationsmethode auseinandergesetzt worden. Überblickt man dasselbe, so findet man, daß es in folgendem besteht:

Man bestimmt aus allen gegebenen n Gleichungen eine und dieselbe Unbekannte und setzt je 2 der erhaltenen Werte einander gleich. Hiedurch erhält man (n — 1) Gleichungen mit (n — 1) Unbekannten. Reduciert man hierauf alle (n — 1) Gleichungen wieder auf eine und dieselbe Unbekannte und kombiniert je zwei der gefundenen Werte zu Gleichungen, so resultieren (n — 2) Gleichungen mit (n — 2) Unbekannten. Diese Operation setzt man so lange fort, bis sich schließlich eine Gleichung mit einer Unbekannten ergibt, deren Wert bestimmt wird. Auf ähnliche Weise sucht man die anderen Unbekannten.

c) Die Additions- und Subtraktions-, oder Aggregations-, oder Koefficienten-Methode (auch englische Methode oder Eliminationsmethode im engern Sinne genannt).

I) Es seien die beiden Gleichungen:

$$1)\ 4x + 3y = 31$$
$$2)\ 5x - 2y = 10$$

zur Auflösung nach dieser Methode vorgelegt. Die Werte für x und y in diesen beiden Gleichungen werden bekanntlich nicht verändert, wenn man alle Glieder beider Gleichungen mit einer und derselben Zahl multipliciert. In dieser Eigenschaft der Gleichungen ist uns ein Mittel an die Hand gegeben, den zu eliminierenden Unbekannten in beiden Gleichungen denselben Koefficienten zu verschaffen. Multipliciert man beispielsweise Gleichung 1) mit 2 und Gleichung 2) mit 3, so erhält man:

$$3)\quad 8x + 6y = 62$$
$$4)\quad 15x - 6y = 30.$$

Es ist nun einleuchtend, daß die Glieder, welche y enthalten, durch Addition der beiden Gleichungen 3) und 4) verschwinden, die Unbekannte y also hiedurch aus beiden Gleichungen eliminiert wird; denn führt man diese Addition aus, so folgt:

$$5)\quad 23x = 92$$

Und daraus $$x = \frac{92}{23} = 4.$$

Hätte man, zum Zwecke der Elimination von x aus beiden Gleichungen, Gleichung 1) mit 5, Gleichung 2) mit 4 multipliciert, so würde man erhalten haben:

$$3)\quad 20x + 15y = 155$$
$$4)\quad 20x - 8y = 40.$$

Auf den ersten Blick ist ersichtlich, daß hier die Addition beider Gleichungen zu einander eine Elimination der Unbekannten x nicht zur Folge hat. Subtrahiert man aber Gleichung 4) algebraisch von Gleichung 3), so resultiert:

$$5)\quad 23y = 115$$

Und daraus $$y = \frac{115}{23} = 5.$$

$$\text{II)}\quad 1)\quad 4x + 3y + 6z = 41$$
$$2)\quad 5x - 2y + z = 8$$
$$3)\quad 2x - 4y + 5z = 12.$$

Um y zu eliminieren, multipliciert man zunächst Gleichung 1) mit 2 und Gleichung 2) mit 3 und addiert beide Gleichungen zu einander, also:

$$4)\quad 8x + 6y + 12z = 82$$
$$5)\quad 15x - 6y + 3z = 24.$$

Durch Addition beider erhält man:

$$6)\quad 23x + 15z = 106.$$

Hierauf multipliciert man Gleichung 2) mit 2 und Gleichung 3) mit 1, wodurch sich ergibt:

$$7)\quad 10x - 4y + 2z = 16$$
$$8)\quad 2x - 4y + 5z = 12.$$

Subtrahiert man Gleichung 8) von Gleichung 7), so kommt:

$$9)\quad 8x - 3z = 4.$$

Die 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten heißen also:

$$6)\ 23x + 15z = 106$$

$$9)\ 8x - 3z = 4.$$

Um z zu eliminieren, multipliciert man Gleichung 6) mit 1 und Gleichung 9) mit 5, so daß man erhält:

$$10)\ 23x + 15z = 106$$

$$11)\ 40x - 15z = 20.$$

Beide Gleichungen addiert, erhält man:

$$12)\ 63x = 126$$

Und daraus $x = \frac{126}{63} = 2.$

In ähnlicher Weise sucht man den Wert von y und z.

Diese zwei Beispiele werden genügen, um eine klare Einsicht in das Wesen der Koefficienten-Methode zu verschaffen. Kurz und bündig zusammengefaßt, läßt es sich folgendermaßen formuliren:

Sind n Gleichungen mit n Unbekannten gegeben, so eliminiert man aus je 2 Gleichungen eine und dieselbe Unbekannte, nachdem man ihr in beiden Gleichungen durch geeignete Multiplikation denselben Koefficienten verschafft hat (wofern sie nicht von vorn herein den gleichen hat), durch Addition oder Subtraktion — durch Addition, wenn die Vorzeichen der zu eliminierenden Glieder entgegengesetzt, durch Subtraktion, wenn sie gleich sind. Auf diese Weise erhält man (n — 1) Gleichungen mit (n — 1) Unbekannten. Diese (n — 1) Gleichungen unterwirft man demselben Verfahren, wie die n Gleichungen und setzt es solange fort, bis man zu einer Gleichung mit einer Unbekannten gelangt, deren Wert man bestimmt. Die übrigen Unbekannten findet man auf ähnliche Weise.

d) Die Bezout'sche oder französische Methode.

I. Es sei die Aufgabe gestellt, die Werte der 2 Unbekannten folgender zwei Gleichungen:

$$1)\ 4x + 3y = 31$$

$$2)\ 5x - 2y = 10$$

nach dieser Methode zu bestimmen. Eliminieren wir zunächst x aus beiden Gleichungen. Im vorigen Beispiel wurde schon gesagt, daß sich der Wert der Unbekannten nicht ändert, wenn man sämtliche Glieder einer Gleichung mit einer und derselben Zahl multipliciert. Wenden wir

diesen Satz auf Gleichung 1) an und multiplicieren sie etwa mit der unbestimmten Zahl a, so folgt:

$$3)\ 4ax + 3ay = 31a.$$

Addiert man nun Gleichung 2) zu Gleichung 3), so ergibt sich die eine Gleichung:

$$4)\ 5x + 4ax - 2y + 3ay = 10 + 31a.$$

Oder, indem man die Unbekannten heraustrennt:

$$x(5 + 4a) + y(3a - 2) = 10 + 31a.$$

Da nun x eliminiert werden soll, so muß das Glied x(5 + 4a) Null werden, d. h. es muß der Koefficient dieses Gliedes, nämlich 5 + 4a, Null werden. Es ist nun leicht ersichtlich, daß er dies wird, wenn man der neu eingeführten und bis jetzt unbestimmt gebliebenen Zahl a den Wert $-\frac{5}{4}$ beilegt. Dieser wird übrigens leichter noch gefunden, wenn man setzt:

$$5 + 4a = 0$$

Denn hieraus folgt zunächst:

$$4a = -5$$

Und daraus $a = -\frac{5}{4}$

Die Substitution dieses Wertes in die Gleichung 4) liefert:

$$5)\ x(5 - 5) + y(-\frac{15}{4} - 2) = 10 - \frac{155}{4}$$

Oder $-\frac{23y}{4} = -\frac{115}{4}$

" $23y = 115$

Und daraus $y = 5$

In ähnlicher Weise $x = 4.$

$$\text{II.}\quad 1)\ 4x + 3y + 6z = 41$$
$$2)\ 5x - 2y + z = 8$$
$$3)\ 2x - 4y + 5z = 12.$$

Man multipliciert 2) mit a und 3) mit b, also:

$$4)\ 5ax - 2ay + az = 8a$$
$$5)\ 2bx - 4by + 5bz = 12b.$$

Die Summation der 3 Gleichungen 1), 4) und 5) liefert:

$$6)\ (4 + 5a + 2b)x + (3 - 2a - 4b)y + (6 + a + 5b)z$$
$$= 41 + 8a + 12b.$$

Sollen nun x und y zum Wegfallen gebracht werden, so müssen die Glieder:

$$(4 + 5a + 2b)x \text{ und}$$
$$(3 - 2a - 4b)y$$

gleich Null werden, d. h. die Koefficienten $(4 + 5a + 2b)$ und $(3 - 2a - 4b)$. Um nun die Werte für a und b zu finden, die dies bewirken, setzen wir, wie schon im vorhergehenden Beispiel gezeigt wurde:

$$4 + 5a + 2b = 0$$

Oder $\quad \text{I} \quad 5a + 2b = -4$

Und $\quad 3 - 2a - 4b = 0$

Oder $\quad \text{II} \quad -2a - 4b = -3.$

I mit 2 und II mit 1 multipliciert, erhält man:

$$\text{III} \quad 10a + 4b = -8$$
$$\text{IV} \quad -2a - 4b = -3.$$

Das Resultat der Addition beider ist:

$$\text{V} \quad 8a = -11$$

Und daraus $\quad a = -\frac{11}{8}$

Die Substitution dieses Wertes in III gibt:

$$\text{VI} \quad -\frac{110}{8} + 4b = -8$$

Oder $\quad 4b = \frac{46}{8}$

Und daraus $\quad b = \frac{46}{32} = \frac{23}{16}.$

Substituiert man nun diese für a und b gefundenen Werte in die Gleichung 6), so erhält man die Gleichung:

$$7) \left(4 - \frac{55}{8} - \frac{46}{16}\right)x + \left(3 + \frac{22}{8} - \frac{23}{4}\right)y +$$
$$\left(6 - \frac{11}{9} + \frac{115}{16}\right)z = 41 - \frac{88}{8} + \frac{69}{4}$$

Oder $\quad \left(6 - \frac{11}{8} + \frac{115}{16}\right)z = 41 - 11 + \frac{69}{4}$

" $\quad \frac{189}{16}z = \frac{756}{16}$

" $\quad 189z = 756$

Und daraus $\quad z = \frac{756}{189} = 4.$

In ähnlicher Weise wird x und y gefunden.

In den vorstehenden zwei Beispielen wurde versucht, das Wesen der Bezout'schen Methode deutlich darzulegen. Resumieren wir dasselbe. Sind n Gleichungen gegeben, so multipliciert man alle bis auf eine mit je einem beliebigen Buchstaben und addiert hierauf sämtliche Gleichungen. In der so erhaltenen Gleichung setzt man sodann die Koefficienten von (n — 1) Unbekannten gleich Null und bestimmt aus diesen auf Null gebrachten Gleichungen die Werte von den eingeführten Buchstaben. Diese trägt man endlich in die Summengleichung ein, wodurch man eine Gleichung mit einer Unbekannten erhält, deren Wert bestimmt wird. Die Werte der andern Unbekannten können auf ähnliche Weise gefunden werden.

Anmerkung. Welche Methode für die Elimination von Unbekannten am schnellsten und bequemsten zum Ziele führt, hängt von der Beschaffenheit der vorliegenden Gleichungen ab. Im allgemeinen dürfte die Additions- und Subtraktionsmethode die vorteilhafteste sein. Umsichtige Verbindung der verschiedenen Methoden kürzt oft die Arbeit bedeutend ab. — Es sei noch bemerkt, daß die Gleichungen zuerst geordnet werden müssen, bevor man mit der Auflösung derselben beginnt.

B. Übungsaufgaben.

a) Aufgaben mit Auflösung.

Erstes Beispiel.

$$1)\quad \frac{2x - 5}{3} - \frac{30 - 3y}{2} = x - 8$$

$$2)\quad \frac{5y + 8}{6} - \frac{4x - y}{8} = \frac{y}{2}$$

Gl. 1) geordnet: $4x - 10 - 90 + 9y = 6x - 48$

Oder: 3) $-2x + 9y = 52$

Gl. 2) geordnet: $20y + 32 - 12x + 3y = 12y$

Oder: 4) $-12x + 11y = -32$

Gl. 3) mit 6 mult.: 5) $-12x + 54y = 312$

Gl. 4) von Gl. 5) subtr.: 6) $43y = 344$

y isoliert: $y = 8$

Diesen Wert in Gl. 3 gesetzt: 7) $-2x + 72 = 52$

Transponiert: $-2x = -20$

Mit — 1 multipliciert: $2x = 20$

x isoliert: $x = 10$

Zweites Beispiel.

$$1)\ x + y = 7$$
$$2)\ x + z = 8$$
$$3)\ y + z = 9$$

Sämtl. Gl. addiert: 4) $2x + 2y + 2z = 24$
Durch 2 dividiert: 5) $x + y + z = 12$
Hievon Gl. 1) subtrahiert: 6) $z = 5$
" " 2) " 7) $y = 4$
" " 3) " 8) $x = 3$

b) Ungelöste Aufgaben.

S. Fuß, Sammlung von Aufgaben, §. 33.

§. 47. Aufzustellende Gleichungen.

A. Erklärungen

In Textaufgaben kommen häufig mehrere Unbekannte vor. In diesem Fall bildet man nach den Bedingungen der Aufgabe so viele Bestimmungsgleichungen als unbekannte Größen vorhanden sind und löst die aufgestellten Gleichungen sodann auf.

B. Übungsaufgaben.

a) Aufgaben mit Auflösung.

1) Wenn man zum 4. Teil vom 3fachen einer Zahl den 6. Teil vom 5fachen einer andern Zahl addiert, so erhält man $9\frac{2}{3}$. Subtrahiert man dagegen vom 8. Teil des 10fachen der ersten Zahl den 16. Teil vom 2fachen der zweiten Zahl, so bleibt 4 übrig. Welches sind die beiden Zahlen?

Die beiden zu suchenden Zahlen mit x und y bezeichnet, erhält man den Bedingungen der Aufgabe gemäß folgende 2 Gleichungen:

$$1)\ \frac{3x}{4} + \frac{5y}{6} = \frac{29}{3}$$

$$2)\ \frac{10x}{8} - \frac{2y}{16} = 4$$

Schafft man die Nenner in beiden Gleichungen fort, so folgt:

$$3)\ 9x + 10y = 116$$

$$4)\ 20x - 2y = 64$$

3) mit 1 und 4) mit 5 multipliciert, erhält man:

$$5)\ 9x + 10y = 116$$

$$6)\ 100x - 10y = 320$$

5) und 6) addiert:

$$7)\ 109x = 436$$

Und daraus $x = 4.$

Diesen Wert in 3) substituiert:

$$36 + 10y = 116$$

Oder $10y = 80$

Und daraus $y = 8.$

2) Für ein Kapital, das auf 1 Jahr ausgeliehen ist, müssen mit Einschluß der Zinsen nach dieser Zeit 2059,925 Mark zurückbezahlt werden. Da die Rückzahlung erst nach 1,8 Jahren erfolgte, so war der Betrag derselben auf 2127,865 Mark angewachsen. Wie groß ist das Kapital und zu wie viel % sind die Zinsen berechnet?

Bezeichnet man das ausgeliehene Kapital, in Mark ausgedrückt, durch x, und die Prozente desselben durch y, so ergeben sich folgende zwei Gleichungen:

$$1)\ x + \frac{xy}{100} = 2059{,}925$$

$$2)\ x + \frac{x\,.\,y\,.\,1{,}8}{100} = 2127{,}865.$$

Löst man dieselben auf (nachdem man die Nenner beseitigt, kann man Gleichung 1) mit 1,8 multiplicieren und von ihr 2) subtrahieren, wodurch x gefunden wird, hierauf durch Substitution dieses Wertes in beide Gleichungen y bestimmen), so erhält man:

$$x = 1975 \text{ Mark}$$

$$y = 4{,}3\%$$

3) Drei Zahlen haben folgende Beschaffenheit. Addiert man 3 zur ersten und zweiten, so verhalten sich die Summen wie 3 : 5; addiert man 4 zur ersten und dritten, so verhalten sich die Summen wie 1 : 2; subtrahiert man aber 10 von der zweiten und dritten, so verhalten sich die Differenzen wie 16 : 21. Welche Zahlen sind es?

Bezeichnet man die 3 zu suchenden Zahlen der Reihe nach durch x, y und z, so erhält man:

$$(x + 3) : (y + 3) = 3 : 5, \text{ oder } 5x + 15 = 3y + 9,$$
$$\text{oder } 5x - 3y = -6.$$

$$(x + 4) : (z + 4) = 1 : 2, \text{ oder } 2x + 8 = z + 4,$$
$$\text{oder } 2x - z = -4.$$

$$(y - 10) : (z - 10) = 16 : 21, \text{ oder } 21y - 210 = 16z - 160,$$
$$\text{oder } 21y - 16z = 50$$

Die 3 gebildeten Gleichungen heißen also:

1) $5x - 3y = -6$
2) $2x - z = -4$
3) $21y - 16z = 50$,

aus denen man $x = 24$, $y = 42$ und $z = 52$ erhält.

b) Ungelöste Aufgaben.

Man vergleiche: Fuß, Aufgabensammlung § 34.

B. Gleichungen des zweiten Grades.

I. Mit einer Unbekannten.

a) Rein-quadratische Gleichungen.

§. 48. Aufgestellte und aufzustellende Gleichungen.

A. Erklärung.

Eine Gleichung von der Form $ax^2 = c$, in der, wie ersichtlich, die Unbekannte nur in der zweiten Potenz auftritt, heißt eine rein-quadratische Gleichung. Dividiert man beide Seiten durch den Koefficienten von x^2, so erhält man:

$$x^2 = \frac{c}{a}$$

Und daraus
$$x = \pm \sqrt{\frac{c}{a}}$$

B. Übungsaufgaben.

a) Aufgaben mit Auflösung.

1) $30x^2 = 17280$.

x^2 isoliert: $x^2 = \frac{17280}{30} = 576$

Durch 2 radiciert: $x = \pm\sqrt{576}$

Das ist: $x = \pm 24.$

$$2)\ x + \sqrt{7 + x^2} = \frac{28}{\sqrt{7 + x^2}}.$$

Den Nenner weggeschafft: $x\sqrt{7 + x^2} + 7 + x^2 = 28$

Den Wurzela. isoliert: $x\sqrt{7 + x^2} = 21 - x^2.$

Beide Seiten quadriert: $x^2(7 + x^2) = (21 - x^2)^2$

Kl. gelöst: $7x^2 + x^4 = 441 - 42x^2 + x^4$

Transp. u zusg.: $49x^2 = 441$

x^2 isoliert: $x^2 = \frac{441}{49} = 9$

Radiciert: $x = \pm\sqrt{9}$

Das ist $x = \pm 3.$

3) Multipliciert man den vierten und fünften Teil einer Zahl mit einander, addiert zu diesem Produkt 20, dividiert hierauf diese Summe durch 8 und subtrahiert schließlich von dem erhaltenen Quotienten 5, so erhält man die Zahl 20. Wie heißt diese Zahl?

Wenn man

von der unbekannten Zahl x

den 4. und 5. Teil mit einander multipliciert $\frac{x}{4} \cdot \frac{x}{5} = \frac{x^2}{20}$

zu diesem Produkt 20 addiert, $\frac{x^2}{20} + 20 =$ . . $\frac{x^2 + 400}{20}$

diese Summe durch 8 dividiert, $\frac{x^2 + 400}{20} : 8 =$ . . $\frac{x^2 + 400}{160}$

von dem Quotienten 5 subtrahiert . . . $\frac{x^2 + 400}{160} - 5$

so erhält man 20 . . . . . $\frac{x^2 + 400}{160} - 5 = 20.$

$$\frac{x^2 + 400}{160} - 5 = 20$$

Nenner bes.: $x^2 + 400 - 800 = 3200$

Transponiert: $x^2 = 3600$

Radiciert: $x = \pm \sqrt{3600}$
Das ist: $x = \pm 60.$

b) Ungelöste Aufgaben.

Man vergleiche: Fuß, Aufgabensammlung, §. 35.

b) Unrein-quadratische Gleichungen.

§. 49. Aufgestellte und aufzustellende Gleichungen.

A. Erklärungen.

Die Gleichung $ax^2 \pm bx = c$ enthält die Unbekannte x außer in der zweiten auch in der ersten Potenz. Gleichungen dieser Beschaffenheit heißen unrein- oder gemischt-quadratische Gleichungen. Ist eine solche Gleichung auf die Form $x^2 \pm bx = c$, in welcher x^2 den Koefficienten $+1$ haben muß, gebracht, so bestimmt man die beiden Wurzeln der Gleichung, d. h. löst dieselbe auf. Um das hiebei einzuschlagende Verfahren besser zu verstehen, bedenke man folgendes: Eine Gleichung von der Form $x^2 \pm bx = c$ kann bloß dadurch aufgelöst werden, daß man aus beiden Seiten derselben die Quadratwurzel zieht. Da nun aber die Ausziehung der Quadratwurzel ohne weiteres nicht möglich, indem die linke Seite der Gleichung kein vollständiges Quadrat ist, so kommt es darauf an, diese Seite durch Hinzufügung eines dritten Gliedes, der sogenannten quadratischen Ergänzung, zu einem vollständigen Quadrat zu machen. Aus der Formel $(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2ax + a^2$ ergibt sich nun, daß das dritte Glied a^2 des aus $(x \pm a)$ gebildeten Quadrats das Quadrat der Hälfte des Koefficienten 2a des zweiten Gliedes 2ax ist, ein Umstand, der uns das Mittel nahe legt, einen Ausdruck von der Form $x^2 + bx$ zum Quadrat zu vervollständigen. Dieses Mittel ist nämlich das Quadrat des halben Koefficienten des zweiten Gliedes. Ist daher eine Gleichung von der Form $x^2 + bx = c$ aufzulösen, so addiert man zu beiden Seiten der Gleichung das Quadrat des halben Koefficienten von x (man ergänzt die Gleichung quadratisch).

B. Übungsaufgaben.

a) Aufgaben mit Auflösung.

1) $x^2 + 4x = 96$

Quad. ergänzt: $x^2 + 4x + 2^2 = 96 + 4$
In Form ein. Quad. darg.: $(x + 2)^2 = 100$
Beiderseits radic.: $x + 2 = \pm 10$
Transponiert: $x = -2 \pm 10$
Mithin: $x_1 = 8$
Und: $x_2 = -12$.

Anmerkung. Der Gleichung $x^2 + 4x = 96$ leisten die beiden Werte 8 und — 12, wie man sich leicht überzeugen kann, Genüge. Reduciert man dieselbe auf Null, also: $x^2 + 4x - 96 = 0$, und bildet nun sowohl die Summe als auch das Produkt der beiden gefundenen Werte, so stellt sich heraus, daß diese beiden Wurzeln der vorgelegten gemischt-quadratischen Gleichung mit dem Koefficienten des zweien Gliedes und mit dem dritten Gliede derselben in einem gewissen Zusammenhang stehen, der sich, da dasselbe von jeder gemischt-quadratischen Gleichung gilt, folgendermaßen allgemein aussprechen läßt:

a) Die Summe der beiden Wurzeln einer unrein-quadratischen Gleichung ist gleich dem Koefficienten des zweiten Gliedes der geordneten Gleichung mit dem entgegengesetzten Vorzeichen; b) das Produkt der beiden Wurzeln einer solchen ist gleich dem bekannten dritten Gliede der geordneten Gleichung (Gesetz der Koefficienten).

2) A und B gaben zu einem gemeinschaftlichen Unternehmen 4000 Mark her. A ließ sein Geld 20 Monate stehen und erhielt an Einlage und Gewinn 1600 Mark. B ließ das seinige 12 Monate stehen und erhielt an Einlage und Gewinn 2600 Mark. Wie viel hatte jeder eingelegt?

Ist die Einlage des A, in Mark ausgedrückt x
so ist „ „ „ B, „ „ „ . . $4000 - x$
A gewinnt an x Mark in 20 Monaten . . . $1600 - x$
B „ „ (4000 — x) Mark in 12 Monaten $2600 - (4000 - x) =$ . . . . $(x - 1400)$
Folglich gewinnt A an 1 Mark in 1 Monat $(1600 - x) : 20x$
„ „ B „ „ „ „ „ „ $(x - 1400) : (4000 - x)12$

Mithin ergibt sich, da die Kapitalien beider Personen gleiche Prozente tragen, die Gleichung:

$$\frac{1600 - x}{20x} = \frac{x - 1400}{(4000 - x)12}$$

Die Nenner weggeschafft:

$$3x^2 - 16800x + 19200000 = 5x^2 - 7000x.$$

Transp. u. zusammengefaßt: $- 2x^2 - 9800x = - 19200000.$

Mit -1 mult. u. durch 2 dividiert: $x^2 + 4900x = 9600000.$

Ergänzt: $x^2 + 4900x + (2450)^2 = 9600000 + 6002500.$

Oder $(x + 2450)^2 = 15602500.$

Aus beiden Seiten die Quadratwurzel gezogen:

$$x + 2450 = \pm \sqrt{15602500} = \pm 3950.$$

x isoliert: $x = - 2450 \pm 3950.$

Also: $x_1 = 1500.$

Und: $x_2 = - 6400.$

Die Einlage des A beträgt also 1500 Mark und die des B 4000 — 1500 = 2500 Mark.

Anmerkung. Um eine Gleichung von der Form $x^4 + 6x^2 = 40$ aufzulösen, setzt man $x^2 = z$ und $x^4 = z^2$; hiedurch verwandelt sich die gegebene Gleichung in: $z^2 + 6z = 40$, aus der man erhält:

$$z^2 + 6z + 3^2 = 40 + 9$$
$$(z + 3)^2 = 49$$
$$z + 3 = \pm 7$$
$$z = - 3 \pm 7$$
$$z_1 = - 3 + 7 = 4$$
$$z_2 = - 3 - 7 = - 10$$

Es ist also $x^2 = 4$

Mithin $x = \pm 2$

Und $x^2 = - 10$

Mithin $x = \pm \sqrt{- 10}.$

b) Gleichungen ohne Auflösung.

Man vergleiche: Fuß, Aufgabensammlung, §. 36.

II. Mit mehreren Unbekannten.

§. 50. Aufgestellte und aufzustellende Gleichungen.

A. Erklärungen.

Die quadratischen Gleichungen mit mehreren Unbekannten werden im allgemeinen so behandelt, wie die vom ersten Grade. In vielen Fällen ist es jedoch vorteilhaft, statt die Unbekannten unmittelbar selbst zu entwickeln, den Wert einer Verbindung derselben, z. B ihrer Summe, Differenz u. s. w. zu bestimmen. Das hiebei einzuhaltende Verfahren, für das sich keine allgemeinen Regeln geben lassen, soll an einigen Beispielen erläutert werden.

B. Übungsaufgaben.

a) Gleichungen mit Auflösung.

1. Beispiel.

$$1)\ x + y = 36$$
$$2)\ xy = 288.$$

1. Auflösung.

Aus Gleichung 2) ist $x = \frac{288}{y}$.

Diesen Wert in Gleichung 1) substituiert:

$$3)\ \frac{288}{y} + y = 36$$

Oder: $y^2 - 36y = -288$

" $y^2 - 36y + 18^2 = -288 + 324$

" $(y - 18)^2 = 36$

" $y - 18 = \pm 6$

Und daraus: $y_1 = 24$

$y_2 = 12.$

Den Wert von y in 1) substituiert:

$x_1 = 12$

$x_2 = 24.$

Es ist also:

$$x_1 = y_2 = 12.$$
$$x_2 = y_1 = 24.$$

2. Auflösung.

Aus 1) ist $x = 36 - y$

„ 2) „ $x = \frac{288}{y}$.

Also:

$$3)\quad 36 - y = \frac{288}{y}.$$

u. s. w.

3. Auflösung.

Gleichung 1) quadriert: 3) $x^2 + 2xy + y^2 = 1296$.

Gleichung 2) mit 4 multipliciert: 4) $4xy = 1152$.

Gleichung 4) von 3) subtrahiert: 5) $x^2 - 2xy + y^2 = 144$

Oder $(x - y)^2 = 144$

„ $x - y = \pm 12$.

Es sind nun die Werte der Summe und Differenz beider Unbekannten gefunden. Aus diesen lassen sich die Unbekannten selbst unmittelbar bestimmen. Die eine Unbekannte ist nämlich gleich der halben Summe plus der halben Differenz und die andere gleich der halben Summe minus der halben Differenz. Mithin:

$$x = \frac{36 \pm 12}{2} = \left.\begin{matrix}24\\12\end{matrix}\right\}$$

$$y = \frac{36 \mp 12}{2} = \left.\begin{matrix}12\\24\end{matrix}\right\}.$$

2. Beispiel.

$$1)\quad x^2 + y^2 = a$$

$$2)\quad xy = b.$$

Gleichung 2) mit 2 multipliciert: 3) $2xy = 2b$.

Gleichung 1) und 3) addiert: 4) $x^2 + 2xy + y^2 = a + 2b$

Oder $(x + y)^2 = a + 2b$

Folglich 5) $x + y = \pm \sqrt{a + 2b}$.

Gleichung 3) von 1) subtrahiert: 6) $x^2 - 2xy + y^2 = a - 2b$

Oder $(x - y^2) = a - 2b$

Folglich 7) $x - y = \pm \sqrt{a - 2b}$.

Man findet mithin:

$$8)\ x = \frac{\pm\sqrt{a + 2b} \pm \sqrt{a - 2b}}{2}$$

$$9)\ y = \frac{\pm\sqrt{a + 2b} \mp \sqrt{a - 2b}}{2}$$

3. Beispiel.

$$1)\ x^2 + y^2 = a$$
$$2)\ x + y = b.$$

Gleichung 1) mit 2 multipliciert: 3) $2x^2 + 2y^2 = 2a$.
Gleichung 2) quadriert: 4) $x^2 + 2xy + y^2 = b^2$.
Gleichung 4) von 3) subtrahiert: 5) $x^2 - 2xy + y^2 = 2a - b^2$
Oder $(x - y)^2 = 2a - b^2$
Folglich 6) $x - y = \pm\sqrt{2a - b^2}$.
Es ergibt sich nun:

$$7)\ x = \frac{b \pm \sqrt{2a - b^2}}{2}$$

$$8)\ y = \frac{b \mp \sqrt{2a - b^2}}{2}$$

4. Beispiel.

Ein Kapital von 1500 Mark hat in einer gewissen Zeit 360 Mark Zinsen getragen. Als der Zinsfuß um 1% erniedrigt wurde, brachte das Kapital erst in einer 2 Jahr längeren Zeit dieselben Zinsen. Wie hoch war der anfängliche Zinsfuß und wie lange stand das Kapital?

Ist der ursprüngliche Zinsfuß x
so ist der um 1% niedriger gestellte Zinsfuß . . . $(x - 1)$
Ist die Zeit, in Jahren ausgedrückt . . . . . . y
so ist die 2 Jahre längere Zeit . . . . . . $(y + 2)$
Die Zinsen von 1500 Mark zu x% in y Jahren: $\frac{1500 \cdot xy}{100} = 15xy$
" " " " " " $(x - 1)$% in $(y + 2)$
Jahren: . . . . . . $\frac{1500(x - 1) \cdot (y + 2)}{100}$.
Da nun die Zinsen in beiden Fällen 360 Mark betragen, so erhält

man, nachdem man den Ausdruck $\frac{1500(x - 1)(y + 2)}{100}$ durch Auflösung der Klammer in $15xy + 30x - 15y - 30$ verwandelt hat, die 2 Bestimmungsgleichungen:

$$1)\ 15xy = 360$$

$$2)\ 15xy + 30x - 15y - 30 = 360.$$

Gl. 1) von Gl. 2) subtrahiert: 3) $30x - 15y = 30$

Durch 15 dividiert: $2x - y = 2$

x isoliert: $x = \frac{2 + y}{2}.$

Dies. W. von x in Gl. 1) substituiert: 4) $15 \cdot \frac{2 + y}{2} \cdot y = 360$

Oder $\frac{15y^2 + 30y}{2} = 360$

" $15y^2 + 30y = 720$

" $y^2 + 2y = 48$

" $y^2 + 2y + 1^2 = 48 + 1$

" $(y + 1)^2 = 49$

" $y + 1 = \pm\sqrt{49} = \pm 7$

$$y = -1 \pm 7$$

$$y_1 = 6 \text{ (Jahre)}$$

$$y_2 = -8.$$

Setzt man den Wert von y_1 in Gleichung 1), so erhält man:

$$15x \cdot 6 = 360$$

$$90x = 360$$

$$x = \frac{360}{90} = 4 \text{ (Procent)}.$$

b) Ungelöste Aufgaben.

Man vergleiche: Fuß, Aufgabensammlung §. 37.

Fischer, W. G. S., Professor, Lehrbuch der Planimetrie mit Rücksicht auf Wöckel's Sammlung geometrischer Aufgaben, bearbeitet von Th. E. Schröder, Professor der Mathematik und Physik am kgl. Gymnasium zu Nürnberg. 3. Auflage. Mit 6 Figurentafeln. Mk. 3.60.

Schon seit vielen Jahren wird dies Lehrbuch an mehreren höheren Lehranstalten mit Erfolg gebraucht und auch beim Selbstunterricht mit Vorliebe benutzt.

Fuss, K., k. Seminarlehrer, Sammlung von Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik u. Algebra für Lehrerbildungsanstalten sowie zum Selbstunterricht bearbeitet. 2. Auflage. Mk. 2.—.

Gleichzeitig integrirender Teil zum Lehrbuch der Arithmetik I.

— — Grundzüge der Chemie aus Versuchen entwickelt. Mit Berücksichtigung der Geologie und physiol. Chemie für Seminarien und andere höhere Lehranstalten sowie zum Selbstunterricht. 2. Auflage. Mit Holzschnitten, vielen Uebungsaufgaben und einem Anhang: Zur Praxis der Chemie. Mk. 4.—

Dieses Lehrbuch ist mit besonderer Rücksicht für bayr. Seminarien entsprechend bearbeitet.

— — Sammlung von Konstruktions- und Rechenaufgaben aus der Planimetrie und Stereometrie nebst Anleitung zu deren Auflösung. Für höhere Lehranstalten sowie zum Selbstunterricht bearbeitet.

I. Teil: Planimetrische Aufgaben. Mk. 1.—
II. Teil: Stereometrische Aufgaben. Mk. 1.20.

Da den meisten der in dieser Sammlung enthaltenen Aufgaben die Resultate, sowie Andeutungen zu ihrer Auflösung beigefügt, viele davon auch vollständig aufgelöst sind, so eignet sich dieselbe auch für den Gebrauch beim Selbststudium. Insbesondere dürfte sie den Herren Schuldienstexpektanten bei der Vorbereitung auf das Anstellungsexamen gute Dienste leisten.

Hopf, Dr. G. W., Rector der Handelsschule in Nürnberg. Fünfzig neue Entwürfe zu deutschen Aufsätzen in Mittelschulen. Mk 1.80.

— — Hilfsbuch zu deutschen Stilübungen. Fünfte verbesserte Auflage mit Berücksichtigung der neuen Orthographie. Mk. 4.—

Dieses Werk hat zahlreiche überaus günstige Urteile erfahren und ist bereits in mehreren Auflagen erschienen.

— — Mitteilungen über Jugendschriften an Eltern und Lehrer nebst gelegentlichen Bemerkungen über Volksschriften. Vom k. bayr. Ministerium d. J. allen Schulbehörden, Lehrern und Lesevereinen bestens empfohlen. Mk 1.60.

Jakob, A., Rector, Hauptlehren der mathematischen Geographie. Für Realschulen, sowie für Lehrerseminarien. Mk. 1.40.

Verfasser gibt in diesem Werkchen die wichtigsten Lehren der mathematischen Geographie in einer möglichst leicht fasslichen Sprache, sodass dieselben von jedem gebildeten Laien verstanden und ohne die specifisch mathematischen Mittel ausgeführt werden können.

Fuß, Konrad,

Lehrbuch der Buchstabenrechnung und Algebra für den Schul- und Selbstunterricht

Bd.: 1

1884